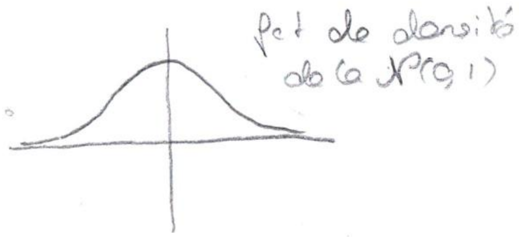
Stats

Loi usuelles

- Loi uniforme

On dit que X suit une loi uniforme sur [a,b] (a,b ∈ $\mathbb{R}$, a < b), ce que l'on note $X \sim \mathcal{U}([a,b])$ si la fonction de densité associé f à pour expression :

$$f(x) = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{b-a} \; si \; x \in [a,b] \\ \quad 0 \; sinon \end{array} \right.$$



Propriétés :

Soit $X \sim \mathcal{U}([a,b])$

- $E[X] = \frac{b+a}{2}$
- $V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $F_X(t) = \left| \begin{array}{l} 0 \; si \; t < a \\ \frac{t-a}{b-a} si \; t \in [a,b] \\ 1 \; si \; t \geq b \end{array} \right.$

Preuve :

Si $E[x]$ existe, elle vaut $\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$

$\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_a^b x * f(x)dx$ car $f(x) = 0$ si $x \notin$ [a,b]

$$= \int_a^b \frac{x}{b-a} dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)}$$

$$= \frac{b+a}{2}$$

Calculons $E[x^2]$ si elle existe

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx = \int_a^b x^2 f(x)dx$$

$$= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}[\frac{x^2}{3}]_a^b$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2 + ab+a^2)}{3(b-a)}$$

Donc $V[X]$ existe et vaut

$$V[X] = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4b^2+4ab+4a^2 -3b^2-6ab-3a^2}{12}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

Par définition on a :

$$\forall \ t \in \mathbb{R}, F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$$

1er cas : si $t < a$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t 0dx = 0$$

2ème cas : $si\ t \ \in [a, b]$

$$F_X(t) = \int_a^t \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}[X]_a^t = \frac{t-a}{b-a}$$

3ème cas : si $t > b$

$$F_X(t) = \int_a^b f(x)dx = 1$$

- Loi exponentielle : $X \sim \mathcal{E}(\theta) \quad (\theta > 0)$

$$f(x) = \left| \begin{array}{l} \theta e^{-\theta x} \; si \; x \geq 0 \\ \quad 0 \; sinon \end{array} \right.$$

Propriétés :

$X \sim \mathcal{E}(\theta)$

$E\,[X] = \frac{1}{\theta}$

$V[X] = \frac{1}{\theta^2}$

$$F_X(t) = \left| \begin{array}{l} 1 - \; e^{-\theta t} \; si \; t \geq 0 \\ \quad 0 \; sinon \end{array} \right.$$

Preuve :

Si $E[X]$existe, elle vaut $\int_{\mathbb{R}} \; xf(x)dx$

$\int_{\mathbb{R}} \; xf(x)dx = \; \int_0^{+\infty} x\theta e^{-\theta x} dx$

La méthode d'Intégration par partie (IPP)

$\int_a^b u * v' = \; [uv]_a^b - \; \int_a^b \; u'v$

$u \to u'$ et $v' \leftarrow v$

$u = x \to u' = \; 1$ et $v' = \; \theta e^{-\theta x} \leftarrow v = \; -e^{-\theta x}$

$\int_{\mathbb{R}} \; xf(x)dx = \; [-x * \; e^{-\theta x}]_0^{+\infty} - \; \int_0^{+\infty} 1 * \left(-e^{-\theta x}\right) dx = \; \int_0^{+\infty} e^{-\theta x} dx$

D'où $\int_{\mathbb{R}} \; xf(x)dx = \; [\frac{-e^{-\theta x}}{\theta}]_0^{+\infty} = \frac{1}{\theta}$

Si on voulait être bien rigoureux $\int_{\mathbb{R}} \; xf(x)dx = \; \int_0^{+\infty} \theta e^{-\theta x} dx$

On calcule $\int_0^N \theta e^{-\theta x} \, dx$ et on fait tendre N vers $+\infty$

- Loi normale (loi gaussienne)

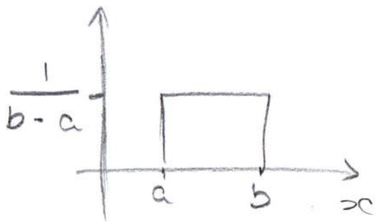
On dit que X suit une loi normale de paramètre n et σ^2 ($n \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$), ce que l'on note $X \sim \mathcal{N}(n, \sigma^2)$, si la fonction de densité associée à pour expression :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2e^{x}}(x\ -n^{2})}$$

Propriétés :

- $E[X] = n$
- $V[X] = \sigma^2$
- $t \to F_X(t)$ existe mais il est impossible d'en avoir une expression analytique
- Si $X \sim \mathcal{N}(n, \sigma^2)$
  Soit $Y = \frac{X-n}{\sigma}$ $alors$ $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$: loi normale centrée réduite
- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$
  Soit $Y = n + \sigma X$ alors $Y \sim \mathcal{N}(n, \sigma^2)$
  L'intérêt réside dans le fait que l'on possède une table uniquement pour la $\mathcal{N}(0,1)$
  La table de la $\mathcal{N}(0,1)$ fournit des approximations de probabilités

Z	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	Les valeurs de P associés			
0,1				
0,2				
0,3				



Remarque : $P = P(X \leq z) = F_X(z)$avec $X \sim \mathcal{N}(0,1) = \int_{-\infty}^{z} f(x)dx$

Remarque : la table ne donne que des probabilités que pour $z \geq 0$ (code suffit)

S : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, soit $z \geq 0$

$P(X \leq -z) = P(X \geq z) = 1 - P(X \leq z)$

Cela résulte du fait que la fonction de densité d'une $\mathcal{N}(0,1)$ a pour expression :

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Longrightarrow$ le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe $x = 0$

si X n'est pas centrée, on n'a pas $P(X \leq -z) = P(X \geq z)$

Remarque : On dit que X est une v.a centrée si $E[X] = 0$

____________________ réduite si $V[X] = 1$

Remarque : On peut utiliser la table pour calculer des probabilités (lecture direct), mais on peut aussi l'utiliser pour déterminer z tq par exemple $P(X \leq z) = 0.95$ (lecture indirecte)

III. Grands résultats de Probabilités

Inégalité de Maihër

Soit X une v.a positive qui possède une espérance, alors :

$\forall \lambda > 0, P(X \geq \lambda E[X]) \leq \frac{1}{\lambda}$

Ou

$\forall \varepsilon > 0, P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}$

Généralisation :

Soit X une v.a telle que $E[-X^2|]$ existe, alors

$\forall \lambda > 0, P(|X^2| \geq \lambda) \leq \frac{E[|X^2|]}{\lambda}$

Ou

$\forall \varepsilon > 0, P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[X^2]}{\varepsilon}$

Inégalité de Beneyne Tcherychev (B T)

Soit X une v.a dont la variance existe alors

$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{V[X]}{\varepsilon}$

Remarque : si $\varepsilon < 0$ il n'y a aucun intérêt car alors $\frac{V[X]}{\varepsilon^2} > 1$

Ce ne sont que des majorations, et on général on est « loin » de la réalité

Ex : $X \sim \mathcal{N}(n, \sigma^2)$

$P(|X - n| \geq a\,\sigma)$ avec $a > 0$

Soit $U = \frac{X-n}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$P(|X-n| > a\,\sigma) = P(|U| > a)$$

$$= P\{U > a\} \cup \{U < -a\})$$

$$= P(U > a) + P(U < -a)$$

$$= P(U > a) + P(U > a)$$

$$= 2P(U > a)$$

$$= 2(1 - P(U \leq a)$$

$$= 2 - 2 \underbrace{P(U \leq a)}_{\text{lecture de la table}}$$

Si on prend $a = 1.5$

$P(U \leq a) - 0.9332 \rightarrow P\ |X-n| > 1.5\sigma) = 0.1336$

Si on utilise l'inégalité de BT, $P(|X-n| > a\sigma) \leq \frac{V[X]}{a^2\sigma^2} \leq \frac{1}{a^2}$

Pour $a = 1.5$ $\qquad \frac{1}{a^2} = 0.444$

Ex d'utilisation :

On lance n fois un dé équilibré à 6 faces.

Que doit valoir n pour être assuré que si on pose f_6 la fréquence d'apparition de 6

$P\left(\frac{1}{6} - 0.001 < f_6 < \frac{1}{6} + 0.01\right) \geq 99\%$

$A = P(\left|f_6 - \frac{1}{6}\right| \leq 0.01)$

Soit X le nombre de fois où 6 est apparu au cours des n lancers

$f_6 = \frac{X}{n}$ où $X \sim B\left(n, \frac{1}{6}\right)$

$E[X] = \frac{n}{6}$

$E[f_6] = \frac{1}{6}$

D'après BT

$P\left(\left|f_6 - \frac{1}{6}\right| \geq 0.01\right) \leq \frac{V[f_6]}{(0.01)^2}$

$V[f_6] = V\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{1}{n^2} * V[X] = \frac{1}{n^2} * \frac{1}{6} * \frac{5}{6} = \frac{5}{36n}$

$P\left(\left|f_6 - \frac{1}{6}\right| \geq 0.01\right) \leq \frac{5*104}{36n}$

➔ $P\left(\left[f_6 - \frac{1}{6}\right) < 0.01\right) \geq 1 - \frac{5*104}{36n}$

Il suffit de prendre n tq $1 - \frac{5*104}{36n} \geq 0.95$

Def convergence en probabilité

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a

On dit que X_n converge en probabilités vers une v.a X si

$\forall\, \varepsilon > 0, P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Notation : $X_n \ \vec{p}\ X$

- Loi des grands nombres (LGN)

Soit (X_n) une v.a mutuellement indépendante tq $\forall\, n, E[X_n] = \mu\ et\ V[X_n] = \sigma^2$

Alors $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\ \vec{p}\ \ \mu$

Def converge en loi

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a de fonction de repartition F_n

Soit X une v.a de fonction de répartition F

On dit que (X_n) converge en loi vers $X\ si$

$(F_n(x))_n$ converge vers $F(x)$ en tout points x où F est continue

Notation : $X_n\ \vec{\mathcal{L}}\ X$

BT = Beneyne Tcherychev

Retour en haut de page

Retour à la page de cours