Stats

II. Variable aléatoire continue

v.a continue = v.a à densité

Def : On appelle v.a continue toute application X :$\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\forall\, x \in \mathbb{R}, X^{-1}(]-\infty, x])$ soit un évènement

Ex : taille d'une personne, rémuneration d'un individu, ect …

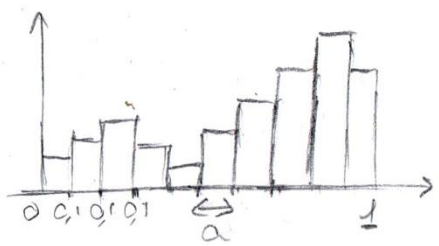
Def : loi de probabilité

Soit X une v.a continue, sa loi de probabilité est donnée pour :

- X(Ω) sous forme d'intervalle
- Une fonction de densité f c'est à dire une fonction vérifiant :
  a. $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$
  b. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Remarque : passage du discret au continu

x taille d'un individu



Construction d'un histogramme

Visualiser la fonction de densité : on fait tendre a vers 0, en faisant attention de toujours avoir l'histogramme d'ordre 1

Calcul de probabilité :

Soit X une v.a continue de fonction de densité f

Soit a,b deux nombres avec a ≤ b

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$$

Remarque : Soit X une v.a continue de fonction de densité f et a,b réels

$$P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_{a}^{a} f(t)dt = 0$$

➔ La variable aléatoire X ne change aucun point

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b)$$

Ceci est faux en discret

Ex : Soit X une v.a continue dont la fonction de densité f est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} si \ -e < x < -1 \\ x + 1 - a \ si - 1 \leq x < 0 \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

Que doit valoir a ?

Pour avoir une fonction de densité il faut :

- $\forall \, x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Or : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-e} f(x)dx + \int_{-e}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$

Donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-e} 0dx + \int_{-e}^{-1} \frac{a}{x}dx + \int_{-1}^{0}(x + 1 - a)dx + \int_{0}^{+\infty} 0dx$

$$= a \int_{-e}^{-1} \frac{1}{x}dx + \int_{-1}^{0}(x + 1 - a)dx$$

$$= a \, [\ln|x|]_{-e}^{-1} + [\frac{x^2}{2} + (1 - a)x]_{1}^{0}$$

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a \, (\ln|-1| - \ln|-e|) + \frac{0^2}{2} + (1 - a) * 0) - \frac{-1^2}{2} + (1 - a) * (-1))$

$$= a \, (0 - 1) + (0) - (\frac{1}{2} - (1 - a))$$

$$= -a + \frac{1}{2} - a$$

$$= -2a + \frac{1}{2}$$

Il faut avoir $-2a + \frac{1}{2} = 1 \implies a = -\frac{1}{4}$

Il faut maintenant vérifier que à $a = -\frac{1}{4}$, on a bien : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

- Si $x \in [-e, -1[, f(x) = -\frac{1}{4x}$
  Comme $x < 0,\ f(x) \geq 0$
- Si $x \in]-\infty, -e[\cup [0, +\infty[,\ f(x) = 0 \geq 0$
- Si $x \in [-1, 0[, f(x) = x + 1 + \frac{1}{4} = x + \frac{5}{4}$
  Or $x \geq -1$ donc $f(x) \geq \frac{1}{4} > 0$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a bien $f(x) \geq 0$

Puisque f est une fonction de densité pour $a = -\frac{1}{4}$ on est en présence d'une v.a continue pour $a = -\frac{1}{4}$

$$P\left(X \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right]\right) = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} -\frac{1}{4x}dx + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(x + \frac{5}{4}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{4}\,[\ln|x|]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}x\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}\ln 2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{5}{8}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\cong 0.42$$

Def : Fonction de répartition :

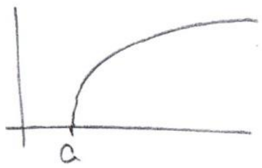
Soit X une v.a continue de fonction de densité f

La fonction de répartition de X, notée F_X, est définie par :

$\forall\, t \in \mathbb{R}, F_X(t) = P(X \leq t) = P(X < t)$

Prop :

- F_X est croissante
- F_X est continue
- $\forall\, x\ \in\ \mathbb{R}, 0 \leq\ F_X(x) \leq 1$
- $\lim_{x\to\,-\infty} F_X\,(x) =\ 0$ et $\lim_{x\to\,+\,\infty} F_X\,(x) =\ 1$
- a,b ∈ $\mathbb{R}$, $P(a \leq x \leq b) =\ F_X$(b) - F_X(a)
- là où F_X est dérivable, on a $F'_X = f$



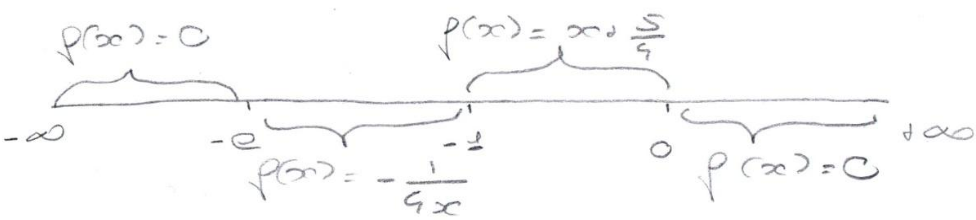
F_X n'est pas dérivable en ce point

Ex : On reprend la fonction de densité précédente

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4x}\ si\ x\ \in [-e,-1[\\ x+\frac{5}{4} si\ x\ \in [-1,0[\\ \quad 0\ sinon \end{cases}$$

Que vaut f(x) ?

Par définition, $\forall\ t\ \in\ \mathbb{R}, F_X(t) =\ P(X \leq t) =\ \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$



1[er] cas : si $t <\ -2$

$$F_X(t) =\ \int_{-\infty}^{t} f(x)dx =\ \int_{-\infty}^{t} 0dx = 0$$

2[ème] cas : si $t\ \in [-e,-1[$

$$F_X(t) =\ \int_{-e}^{-1} f(x)dx +\ \int_{-e}^{t} f(x)dx$$

$$=\ \int_{-\infty}^{-e} 0dx +\ \int_{-e}^{t} -\frac{1}{4x}dx$$

$$=\ -\frac{1}{4}[\ln|x|]_{-e}^{t}$$

$$=\ -\frac{1}{4}(\ln|t| - 1)$$

3ème cas : $si\ t\ \in [-1{,}0[$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{-e} 0dx + \int_{-e}^{1} -\frac{1}{4x}\, dx + \int_{-1}^{t} \left(x + \frac{5}{4}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{4}(0-1) + [\frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}x]_{-1}^{t}$$

$$= \frac{t^2}{2} + \frac{5}{4} + 1$$

4ème cas : si $t > 0$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{-e} 0dx + \int_{-e}^{-1} -\frac{1}{4x}\ dx + \int_{-1}^{0} \left(x + \frac{5}{4}\right) dx + \int_{0}^{t} 0dx = 1$$

Remarque : Utilité d'une fonction de répartition

Soit X une v.a continue de fonciton de densité

$$f(x) = \left| \begin{array}{c} x\ sur\ [0{,}1] \\ \frac{1}{15} x\ sur\ [1{,}4] \\ 0\ sinon \end{array} \right.$$

On considère la variable Y définie par Y = 2X + 1

Déterminer les lois de Y

La méthode :

1. On détermine la fonction de répartition de X, notée F_X
2. On calcule la fonction de répartition de Y, notée F_Y grâce à F_X
3. On dérive F_Y pour obtenir la fonction de densité de Y

Application :

1. Calcul de F_X

$$F_X = \left| \begin{array}{c} 0\ si\ t < 0 \\ \frac{t^2}{2}\ si\ t\ \in [0{,}1[\\ \frac{t^2}{30} + \frac{14}{30} si\ t\ \in [1{,}4[\\ 1\ si\ t \geq 4 \end{array} \right.$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$

$F_y(t) = P(Y \leq t) = P(2X - 1 \leq t) = P\left(X \leq \frac{t-1}{2}\right) = F_X(\frac{t-1}{2})$

D'où

$$F_y(t) = \left| \begin{array}{c} 0 \; si \frac{t-1}{2} < 0 \Leftrightarrow t < 1 \\ \frac{\left(\frac{t-1}{2}\right)^2}{2} = \frac{(t-1)^2}{8} \; si \; 0 \leq \frac{t-1}{2} < 1 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq t < 3 \\ \frac{(t-1)^2}{4*30} + \frac{14}{30} \; si \; 1 \leq \frac{t-1}{2} < 4 \;\Leftrightarrow 3 \leq t < 9 \\ 1 \; si \frac{t-1}{2} \geq 4 \;\Leftrightarrow t > 9 \end{array} \right.$$

3. Les seuls problèmes de dérivabilité sont aux points de recèlement

$$F_y(t) = \left| \begin{array}{c} 0 \; si \; t < 1 \\ \frac{t-1}{4} si \; 1 < t < 3 \\ \frac{t-1}{2*30} \quad si \; 3 < t < 9 \\ 0 \; si \; t > 9 \end{array} \right.$$

Def : Espérance et variance :

Soit X une v.a continue de fonction de densité f

L'espérance de X, si elle existe, vaut $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

La variance de X, si elle existe, vaut $V[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[x])^2 f(x)dx$

Remarque : $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Avec $E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$

$E[h(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) * f(x)dx$

Loi usuelles :

- Loi exponentielle :

On dit que $X \sim \mathcal{C}(\theta) = (\theta > 0)$

La fonction de densité associée est

$$f(x) = \left| \begin{array}{c} \theta e^{-\theta x} \; si \; x > 0 \\ 0 \; sinon \end{array} \right.$$

Propriétés :

Soit X ~ $\mathcal{C}(\theta)$

$E[X] = \frac{1}{\theta}$

$V[X] = \frac{1}{\theta^2}$

$\forall\, t \in \mathbb{R}, F_X(t) = \left| \begin{matrix} 0 \; si \; t < 0 \\ 1 \; si \; t > 0 \end{matrix} \right.$

Retour en haut de page

Retour à la page de cours