Chapitre 1 : Un peu de probabilité (suite)

1. Espérance et variance

Rappel :

$E[X] = \sum_{i \in \mathbb{N}} P_i * x_i$

$V[X] = \sum_{i \in \mathbb{N}} P_i * (x - E[X])^2$

Propriété :

- $\forall a \in \mathbb{R}$, E[a] = a
- $\forall a \in \mathbb{R}$, E[X + a] = E[X] + a
- $\forall a \in \mathbb{R}$, E[aX] = aE[X]
- $\forall a \in \mathbb{R}$, E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y] (c'est à dire E[X] une application linéaire]
- $\forall a \in \mathbb{R}$, V[a] = 0
- $\forall a \in \mathbb{R}$, V[X + a] = V[X] (donc pas une application linéaire)
- $\forall a \in \mathbb{R}$, V[aX] = a^2V[X] (V[X] constante positive)

⚠ V[X + Y] n'est pas toujours égal à V[X] + V[Y]

Remarque : Si X + Y sont 2 variables aléatoires indépendantes, alors V[X + Y] = V[X] + V[Y]

Def d'indépendance : X et Y sont dites indépendantes si ∀ événement A et ∀ événement B :

$P[X \in A \text{ et } Y \in B] = P[X \in A] * P[Y \in B]$

⚠ Il n'est pas vrai de dire : si V[X + Y] = V[X] + V[Y] alors X et Y sont indépendantes.

Ex : le lancé d'un dé équilibré

X le numéro qui apparait sur la face supérieur

$X(\Omega) = \{1, \ldots, 6\}$

$\forall i \in \{1, \ldots, 6\}$, $P(X = i) = \frac{1}{6}$

Puisque $X(\Omega)$ est un espace fini, l'espérance de X existe et vaut :

$$E[X] = \sum_{i=1} x_i * P_i = \sum_{i=1}^{6} i * \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} i = \frac{1}{6} * \frac{6*7}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$V[X] = \sum_{i=1}^{6} P_i \, (x_i - E[x])^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \, (i - 3.5)^2$$

Rappel : $\sum_{i=1}^{n} \frac{n*(n+1)}{2}$

Interprétation :

<u>Espérance :</u> C'est le barycentre des points w_i d'abscisses x_i , pondérés par les points P_i

L'espérance est associée à la nature de gain moyen lors d'un jeu

Ex : 2 joueurs A et B jouent avec un dé.

Le joueur A est gagnant si le chiffre sur le dé est ≤ 2, sinon le joueur B gagne.

a et b sont les mises respectives des joueurs A et B.

Comment doivent être a et b pour que le jeu soit équitable ?

$X_A : \begin{cases} 0 & sinon \\ a+b & si\ le\ dé\ \leq 2 \end{cases}$

$X_B : \begin{cases} 0 & sinon \\ a+b & si\ le\ dé\ \geq 3 \end{cases}$

$P(X_A = 0) = \frac{4}{6}$ $P(X_B = 0) = \frac{2}{6}$

$P(X_A = a + b) = \frac{2}{6}$ $P(X_B = a + b) = \frac{4}{6}$

$E[X_A] = 0 * \frac{4}{6} + (a + b) * \frac{2}{6} = \frac{1}{3}(a + b)$

$E[X_B] = 0 * \frac{2}{6} + (a + b) * \frac{4}{6} = \frac{2}{3}(a + b)$

Ainsi, pour avoir un jeu équitable, il faut

$\begin{cases} E[X_A] = a \\ E[X_B] = b \end{cases}$ $\Rightarrow b = 2a$

<u>Variance :</u> c'est une mesure de dispersion qui mesure "l'écart" entre les valeurs prises par la v.a et sa valeur moyenne qu'est l'espérance.

E[X] est la moyenne en probabilité

2. Lois discrètes usuelles :

a/. Bernoulli

Def : X est une v.a de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, si

- $X(\Omega) = \{0,1\}$
- $P(X = 1) = p$
- $P(X = 0) = 1 - p$
-

Modélisation : Une v.a de Bernoulli modélise une expérience pour laquelle il n'existe que 2 « issues »

Résultats connus : fonction de répartition $F_X(t) = \left| \begin{array}{l} 0 \; si \; t < 0 \\ q \; si \; t \in [0,1[\\ 1 \; si \; t \geq 1 \end{array} \right.$

Donc $E[X] = p$

$V[X] = p * q$

Preuve : si $X \sim \mathcal{B}(p)$ $\Leftrightarrow$ X est une v.a qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p

$E[X] = P(X = 0) * 0 + P(X = 1) * 1 = P(X = 1) = p$

$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Si $E[X^2] = \sum_{i=1} {x_i}^2 * P_i = 0^2 * P(X = 0) + 1^2 * P(X = 1) = P(X = 1) = p$

$V[X] = p - p^2 = p(1-p) = p * q$

b/. Binomiale

Def : On dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p (ce qui s'écrit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$) si :

- $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$
- $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

On considère une expérience à 2 issues modélisés pour une v.a de Bernoulli de paramètre p

On répète cette expérience, de façon indépendante, n fois

X le nombre de succès au cours des n expériences $\Rightarrow$ X est une v.a de $\mathcal{B}(n, p)$

Mathématiquement :

$\forall$ i $\in$ {1, …, n}, $X_i \sim \mathcal{B}$ (p) $\begin{cases} = 0 \text{ est echec à la première expérience} \\ = 1 \text{ est succès à la première expérience} \end{cases}$

X = X_1 + X_2 + … + X_n avec les X_i indépendantes 2 à 2

Résultat connus : Si X $\sim \mathcal{B}$ (n, p) :

- E[X] = n $*$ p
- V[X] = n $*$ p $*$ q

Preuve de l'espérance : comme X $\sim \mathcal{B}$ (n, p)

X = X_1 + … + X_n avec X $\sim \mathcal{B}$ (p) et indépendance 2 à 2

E[X] = E[X_1 + … + X_n]

= E [X_1] + … + E[X_n]

= n $*$ E[X_1] car toutes les X_i sont de même loi

= n $*$ p

Remarque : Si on été passé par les définitions de l'expérience, on aurait dû calculer :

$$\sum_{i=0}^{n} i * P(X = i) = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Preuve de la variance : comme X $\sim \mathcal{B}$ (n, p)

V[X] = V[X_1 + … + X_n]

= V[X_1] + … + V[X_n] car indépendance 2 à 2

= n $*$ V[X_1] car toutes les v.a sont de même loi

= n $*$ p $*$ q

Remarque : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $X = X_1 + \ldots + X_n$ $\Rightarrow$ $X(\Omega) : \{0, .., n\}$ car $\forall$ i, $X_i \in \{0,1\}$

Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$

P(X = k) = P(k succès et (n – k) échouées au cours de n expériences)

= (nombre de façon d'avoir k succès et (n – k) échecs avec les n expériences) $*$ P(les k première expériences sont des succès et les (n – k) dernières des échecs)

$$= \left[\binom{n}{k} = \mathcal{C}_n^p = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right] * p^k * (1-p)^{n-k}$$

c/. Poisson

Def : On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ, ($\lambda > 0$) (ce qui s'écrit $X \sim P(\lambda)$) si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

Propriétés connues :

Soit $X \sim P(\lambda)$: $E[X] = V[X] = \lambda$

Retour page de cours seconde année

Retour en haut de page