Chapitre 1 : Un peu de probabilité

1. Vocabulaire Aléatoire (V.A.)

Lancer une pièce → codage pile = 1
face = 0

Lancer un dé → si on s'intéresse au résultat sur la face supérieur du dé : pas de codage
→ si on s'intéresse au caractère pair/impair : codage

Une variable aléatoire = une fonction
X : $\Omega \rightarrow$ R Ω univers (ensemble des éléments possible)

Ex : - lancer de pièce Ω : {pile, face}
- lancer du dé Ω : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Un élément $w \in \Omega$,
$X(w)$ est aussi une aléatoire donc il y a calcul de probabilités

On veut définir des probabilités sur l'espace $X(\Omega)$, donc par principe on revient sur Ω pour faire les calculs.

On a 2 situations de calcul :
- cas dénombrable $X(\Omega)$ fini / $X(\Omega) \subset$ Z / $X(\Omega)$ est en bijection avec $\mathbb{N}$
- cas continu X(Ω) $\subset \mathbb{R}$

2. V.a. discrète

Cas : $X(\Omega)$ est dénombrable

Def : On appelle v.a. discrète sur (Ω , + ∞) une application $X : \Omega \rightarrow$ R tel que
- $X(\Omega)$ est dénombrable
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(x)$ est un évènement ($X^{-1}(x) \in$ P (Ω))

Ex : lancer d'une pièce de monnaie
X : {pile, face} → $\mathbb{R}$ pile = 0 / face = 1
$X(\Omega)$ {0, 1}
$X^{-1}(\{1\})$: face $\subset$ {pile, face}
$X^{-1}(\{0\})$: pile $\subset$ {pile, face}
Pour tout $x \in$ R _ {0, 1} $X^{-1}(\{x\}) = \varnothing$

Loi de probabilité :
$X(\Omega)$ dénombrable : $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$
La loi de probabilité de X, notée Px est donnée par les probabilités de P_i définies par
$P_i = Px(X = x_i) = P(X(x_i))$

Si $X(\Omega)$ est fini :

x_i	a_1	a_2	…	a_n
P_i	P_1	P_2	…	P_n

Ex : lancé d'un dé équilibré

1. X le n° sur la face supérieure
   $X(\Omega)$: {1, 2, …, 6}
   Pour tout i $\in$ {1, …, 6} P_i = P (i apparait sur la face supérieure du dé) = 1/6

2. X = 1 si $\in$ {5,6}
   0 sinon
   $X(\Omega)$ = {0,1}
   P_1 = P(X = 1) = P(5 ou 6 apparait) = 2/6 = 1/3
   P_0 = P(X = 0) = P(1, 2, 3, ou 4 apparait) = 4/6 = 2/3

Probabilités :
- toutes les probabilités sont ≥ 0 et ≤ 1
- la somme des probabilités vaut 1

Rappel : Soit A et B 2 évènements disjoints
P(A $\vee$ B) = P(A) + P(B) avec ((A $\wedge$ B) $\neq$ 0)

3. La fonction de répartition

Def : La fonction de répartition de v.a. de X notée F_X, la fonction définie par $F_X : R \rightarrow \{0,1\}$
$X \rightarrow P(X \leq x)$

Remarque : puisque nous somme dans le cas discret,
$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = P_X(X \leq x) = \sum_{i \in \mathbb{N} \text{ tq } x_i \leq x} P_i$

La convention est celle anglo saxonne (≤ au lieu de < en français)

Propriété :
- Fonction en escalier
- Fonction continue à droite
- Fonction croissante
- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- $\lim_{x \to 0} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Ex : X = n° de la face du dé

$F_X(x) = 0$ si $x < 1$
$= 1/6$ si $x \in [1, 2[$
$= 2/6$ si $x \in [2, 3[$
$= 3/6$ si $x \in [3, 4[$
$= 4/6$ si $x \in [4, 5[$
$= 5/6$ si $x \in [5, 6[$
$= 1$ si $x \geq 6$

Soit $x \in [3, 4[$
$F_X(x) = P(X \leq x) = P(x \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

4. Espérance et variance

Def : On appelle espérance de la v.a. X la quantité, ssi elle existe :
$E[X] = \sum_{i \in \mathbb{N}} P_i * x_i$

Def : On appelle variance de la v.a. X la quantité, ssi elle existe :
$V[X] = \sum_{i \in \mathbb{N}} P_i * (x - E[X])^2$

Remarque : $V[X] = E[(X - E[X])^2]$
$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ sachant que pour tout application h, $E[h(X)] = \sum_{i \in \mathbb{N}} P_i * h(x_i)$

Bijection : tout élément au départ → un seul élément à l'arrivé et réciproquement

Retour page de cours seconde année

Retour en haut de page