TD Logique Feuille 4

Preuve dans tous les modèles (Calcul des prédicats)

1. **Mettre sous forme prenexe puis de skolem les formules :**
   - $(\forall x\, p(x)) \Rightarrow \exists x\, q(x)$
   - $(\forall x \forall y\, (\exists z\, p(x,z) \wedge p(y,z)) \Rightarrow \exists u\, q(x,y,u))$
   - $(\exists x\, p(x,a)) \Rightarrow \neg\, (\forall y\, q(x,y) \vee r(x))$

2. **Calculer (lorsque c'est possible) un plus grand unificateur pour les formules suivantes:**

$A = p(f(g(a,y)), z, y)$	$B = p(f(z), x, f(b))$
$A = p(f(g(x,y)), g(v,w), y)$	$B = p(f(z), x, f(x))$
$A = p(f(x), f(y), f(z))$	$B = p(g(x), g(y), g(z))$
$A = p(x, f(x), g(f(x), x))$	$B = p(z, f(f(g(a,z)), v))$
$A = p(f(x), x)$	$B = p(y, f(y))$
$A = p(f(f(b, x_1, x_1), x_2, x_2), x_3, x_3)$	$B = p(x_4, x_4, f(x_5, x_5, b)))$

3. **Les marchands**
   Aucun marchand de voitures d'occasion n'achète de voiture d'occasion. Certaines personnes qui achètent des voitures d'occasion sont complètement malhonnêtes. Conclure que certaines personnes complètement malhonnêtes ne sont pas des marchands de voitures d'occasion.

4. **Prouver que nous vivons dans un monde dangereux !**
   À partir des énoncés suivants :
   - Pour tout crime, il y a quelqu'un qui l'a commis;
   - Seuls les gens malhonnêtes commettent des crimes;
   - Les gens malhonnêtes arrêtés ne commettent pas de crimes;
   - Il y a des crimes.

   montrer qu'il y a des gens malhonnêtes non arrêtés

5. **Le célèbre professeur Manolo m'a dit: "il existe un homme tel que si cet homme aime le football, alors tout le monde aime le football"**
   - qu'en pensez-vous?
   - formuler cette phrase dans le langage du premier ordre et confirmer ou infirmer sa validité.
   - donnez-en une formulation en français non ambigüe.

6. **Diminution ...**
   Soit l'ensemble de clauses $S = \{p(x) \vee p(y),\ \neg p(x) \vee \neg p(y)\}$

- Expliquer pourquoi la règle d'inférence de la résolution ne permet pas de dériver la clause vide.
- Montrer que l'utilisation de la règle d'inférence de diminution permet de détecter l'inconsistance de S.

7. **Montrer l'existence d'un inverse à *gauche***
   On considère les axiomes suivants de la théorie des groupes [1]:
   - $\forall x \, \forall y \, \exists z \, p(x, y, z)$
     (opération interne)
   - $\forall x_1 \, \forall y_1 \, \forall z_1 \, \forall x_2 \, \forall y_2 \, \forall z_2 \, (p(x_1, y_1, x_2) \; \wedge \; p(y_1, z_1, y_2)) \Rightarrow (p(x_1, y_2, z_2) \Leftrightarrow (p(x_2, z_1, z_2))$
     (associativité)
   - $\exists x \, [\forall y \;\; p(x, y, y) \;\;\; \wedge \;\;\; \forall z \, \exists u \;\; p(u, z, x)]$ (existence de l'élément neutre à gauche et l'existence d'un inverse à droite)

   Montrez l'existence d'un inverse à gauche, i.e., montrez que

   $$\Phi = \exists x [\forall y \, p(x, y, y) \; \wedge \; \forall z \, \exists u \, p(z, u, x)]$$

   découle des axiomes ci-dessus.

[1] Pour éviter d'utiliser le prédicat d'égalité, on introduit un prédicat $p(x, y, z)$ à 3 variables qui s'interprète comme $x.y = z$