M1 IFI-RIF **Année 2012-2013**

TD Logique Feuille 2

Sémantique

1. **Soient les formules :**

   (a) p(a,b) $\wedge$ $\neg$ p(f(a),b)

   (b) $\exists$ y p(y,b)

   (c) $\exists$ y p(y,x)

   (d) $\forall$ x $\exists$ y p(x,y)

   (e) $\forall$ x p(x,y)

   (f) $\exists$ y $\forall$ x p(x,y)

   (g) $\exists$ y ((p(y,a) $\vee$ p(f(y),b))

   Soit l'interprétation I1 telle que:

   - le domaine est les entiers naturels

   - a est le chiffre 0

   - b est le chiffre 1

   - f est la fonction successeur

   - p est la relation $<$

   Les propositions précédentes sont elles valides dans l'interprétation I1?

   Même question pour l'interprétation I2 :

   - domaine : les listes de longueur quelconque contenant des 0 et des 1

   - a est la liste vide

   - b est la liste $\{1, 1, 1, 1, 1\}$

   - f est la fonction $cons_1$ qui ajoute un 1 en tête d'une liste

   - p est la relation $length(x) < length(y)$

2. **Interprétations**

   - Trouver une interprétation qui prouve que :
     $((\exists\ x\ p(x)) \wedge\ (\exists\ x\ q(x))) \Leftrightarrow\ (\exists\ x(p(x) \wedge\ q(x)))$
     n'est pas universellement valide.
   - Trouver une interprétation I dans laquelle la formule :
     $(\forall\ x \exists\ y\ p(x, y)) \wedge\ (\forall\ x \neg p(x, x))$
     est valide.
     Cette formule peut-elle être valide pour une interprétation dont le domaine a un seul élément ?

3. **Validité**

Soit le langage :

- variable : x , y

- symboles fonctionnels : f (arité 2), a (arité 0)

- symboles de prédicat : p (arité 2)

Soit l'interprétation I :

- domaine : les entiers positifs

- f est la fonction somme, a la constante 0

- p est l'égalité

Caractériser la validité des propositions suivantes (cf cours 3.20) :

(a) $\forall$ x p(f(x,y),x)

(b) ($\forall$ x p(f(x,y),x)) $\Rightarrow$ ($\exists$ x p(f(x,y),x))

(c) $\forall$ x $\exists$ y p(f(x,y),a)

(d) $\forall$ x $\forall$ y p(f(x,y),f(y,x))