Cours de Logique

Master 1 Informatique

Jean-Charles Régin

Sémantique

Sémantique

Donner un sens aux symboles de la théorie.

Soit la formule :

$$\forall x \; p(x, x)$$

quelle est sa signification ?

Pour donner du sens à cette formule il faut:

- fixer un domaine dans lequel la variable x prend ses valeurs
- donner un sens au symbole de prédicat p comme une relation entre les éléments de ce domaine

1er sens :

domaine : les entiers

relation p : x est un diviseur de y

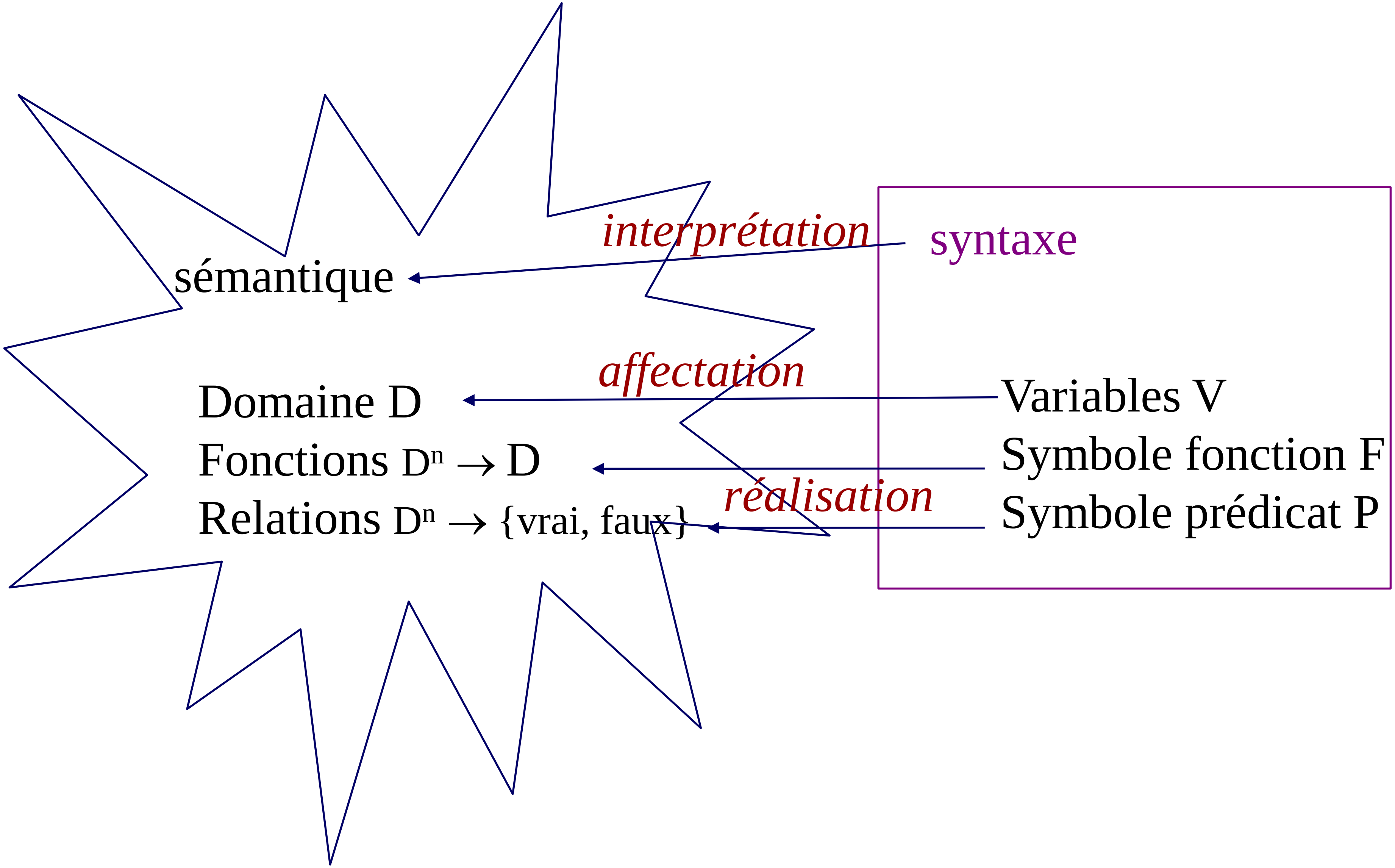
$\forall x\ p(x, x)$ a la signification : pour tout entier x, x est un diviseur de x

2ème sens :

domaine : les humains

relation p : x a peur de y

$\forall x\ p(x, x)$ a la signification : pour tout humain x, x a peur de lui-même



sémantique
interprétation
syntaxe
affectation
Domaine D
Variables V
Fonctions $D^n \to D$
Symbole fonction F
réalisation
Relations $D^n \to$ {vrai, faux}
Symbole prédicat P

Interprétations

Soit L(F, R, V) un langage

F: symboles de fonction, R: symboles de prédicats,

V: symboles de variables

Une **interprétation** I de L(F, R, V) est constituée :

- d'un ensemble non vide domaine D_I *valeurs pour V*
- de fonctions F_I (de D^n_I dans D_I) *réalisation de F*
- de relations R_I (de D^n dans <vrai,faux>) *réalisation de R*

Exemple

F = {a (0-aire), g (1-aire)}

R = {p (2-aire) }

Interprétation I1

$D_{I1} = N$ (les entiers naturels)

$F_{I1} = \{ \to 0, x \to x+1\}$ (a est 0, g la fonction successeur)

$R_{I1} = \{(x, y) \to x < y\}$ (p est la relation <)

Interprétation I2

$D_{I2} = N$ (les entiers naturels)

$F_{I2} = \{ \to 1, x \to 1 / x\}$ (a est 1, g la fonction inverse)

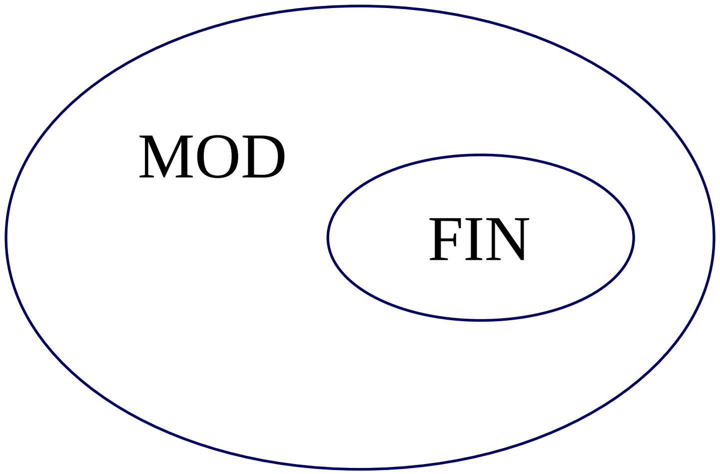
$R_{I2} = \{(x, y) \to x < y\}$ (p est la relation <)

Interprétations

- du 1er ordre MOD

- finiment engendrées FIN

  Si tout élément de D_I est dénoté par un terme clos (i.e. terme sans variable) du langage L(F,R,V)



Exemple 1

$F = \{a \text{ (0-aire)}, g \text{ (1-aire)}\}$

$R = \{p \text{ (2-aire)} \}$

Interprétation I1

$D_{I1} = N$

$F_{I1} = \{ \rightarrow 0, x \rightarrow x + 1 \}$

$R_{I1} = \{(x, y) \rightarrow x < y\}$

Tout élément de N est dénoté par g(g(g(….(g(a))))))

où g apparaît n fois quand a est interprété par « 0 » et g par « $x \rightarrow x +1$ »

I1 est une interprétation de FIN

Exemple 1

F = {a (0-aire), g (1-aire)}

R = {p (2-aire) }

Interprétation I2

D_{I2} = N

$F_{I2} = \{ \rightarrow 1, x \rightarrow 1 / x\}$

$R_{I2} = \{(x, y) \rightarrow x < y\}$

I2 est une interprétation de MOD

Exercice

$F = \{a \text{ (0-aire)}, g \text{ (1-aire)}\}$

$R = \{p \text{ (2-aire)} \}$

Interprétation I3

$D_{I3} = N$

$F_{I3} = \{ \rightarrow 0, x \rightarrow x + 2\}$

$R_{I3} = \{(x, y) \rightarrow x < y\}$

I3 est une interprétation de ?

Validité

Soient : $L(F,R,V)$ un langage
$I = < F_I, R_I, D_I >$ une interprétation
ϕ une formule du langage

Problème :

Que peut-on dire de ϕ quand on passe au monde sémantique correspondant à l'interprétation I ?

Etapes :

ϕ vraie pour une certaine interprétation et une **certaine valuation**

ϕ vraie pour une **certaine interprétation**

ϕ vraie pour **toute interprétation**

Affectation et valuation

- Une fonction d'affectation σ associe à chaque variable de V un élément de D_I (on note σ x la valeur associée à x)

- Une valuation val d'un terme t dans I par rapport à σ est définie récursivement par :

  $val(t, \sigma) = \sigma\ x \quad \text{si } t \equiv x \in V$

  $val(t, \sigma) = f_I\ (val(t_1, \sigma), \dots, val(t_n, \sigma)) \quad \text{si } t \equiv f\ (t_1, \dots, t_n)$

Exemple

F = { g (1-aire), f (2-aire), $\perp$ (0-aire)}

Soit le terme t $\equiv$ f (g(g(x)), f($\perp$, y)).

Avec l'interprétation I1 : $D_{I1} = N$, $F_{I1} = \{ x \rightarrow x + 1, (x,y) \rightarrow x + y, 0\}$
et la fonction d'affectation σ : $x \rightarrow 3$ et $y \rightarrow 8$, en appliquant
la définition récursive de la valuation on obtient :

$$\begin{aligned} val\,(t\,,\sigma) &= ((\sigma\, x + 1) + 1) + (0 + \sigma\, y\,) \\ &= ((3 + 1) + 1) + (0 + 8) \\ &= 13 \end{aligned}$$

$I \models_{\sigma} \phi$

$$\boxed{I \models_{\sigma} \phi}$$

Φ est satisfiable dans I

- pour $\phi \equiv r\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ssi $(\, val(t_1, \sigma\,), \ldots, val(t_n, \sigma\,)\,) \in r_I$
  (i.e. $r_I(val(t_1, \sigma\,), \ldots, val(t_n, \sigma\,)) = vrai$)

- pour $\phi \equiv t_1 = t_2$ ssi $val(t_1, \sigma\,) = val(t_2, \sigma\,)$

Exemple 1

$F = \emptyset$, $R = \{r \text{ (2-aire)}\}$

interprétation I : domaine D_I: {rever,voir,riov,toto}

relation r_I : {(rever,rever),(voir,riov)}

formule : $\phi \equiv r(x,y)$

valuation σ_1 : $x \to$ rever, $y \to$ rever

valuation σ_2 : $x \to$ rever, $y \to$ voir

$(val(x, \sigma_1), val(y, \sigma_1)) = (\text{rever}, \text{rever}) \in r_I$ donc $I \models_{\sigma 1} \phi$

$(val(x, \sigma_2), val(y, \sigma_2)) = (\text{rever}, \text{voir}) \notin r_I$ donc $I \not\models_{\sigma 2} \phi$

Exemple 2

$F = \{\ g\ (1\text{-aire}),\ f\ (2\text{-aire}),\ \perp\ (0\text{-aire})\}$

$I1 : D_{I1} = N,\ F_{I1} = \{\ x \to x + 1,\ (x,y) \to x + y,\ 0\}$

$t1 = f(g(g(x)), y)$ $\qquad\qquad$ $t2 = f(g(x), g(y))$

$\sigma : x \to 3,\ y \to 2$

$$I \models_{\sigma} \quad t1 = t2$$

Car $\quad val(t_1, \sigma\ ) = ((3+1)+1) + 2 = 7$

et $\quad val(t_2, \sigma\ ) = (3+1)+ (2+1) = 7$

$I \models_\sigma \phi$ (suite)

$\boxed{I \models_\sigma \phi}$ (suite)

σ satisfait ϕ dans I

- pour $\phi \equiv \neg \varphi$ ssi $I \not\models_\sigma \varphi$
- pour $\phi \equiv \phi_1 \vee \phi_2$ ssi $I \models_\sigma \phi_1$ ou $I \models_\sigma \phi_2$
- pour $\phi \equiv \phi_1 \wedge \phi_2$ ssi $I \models_\sigma \phi_1$ et $I \models_\sigma \phi_2$
- pour $\phi \equiv \phi_1 \Rightarrow \phi_2$ ssi $I \not\models_\sigma \phi_1$ ou $I \models_\sigma \phi_2$
- pour $\phi \equiv \phi_1 \Leftrightarrow \phi_2$ ssi $I \models_\sigma \phi_1 \Rightarrow \phi_2$ et $I \models_\sigma \phi_2 \Rightarrow \phi_1$

Exemple

$F = \emptyset$, $R = \{r \text{ (2-aire)}\}$

formules : $\phi_1 \equiv r(x,y_1)$, $\phi_2 \equiv r(x,y)$

interprétation I : domaine D_I: {rever,voir,riov,toto}

relation R_I : {(rever,rever),(voir,riov)}

valuation σ : $x \rightarrow$ rever, $y \rightarrow$ rever, $y_1 \rightarrow$ toto

$$I \models_\sigma \neg \phi_1$$

$$I \models_\sigma \phi_1 \vee \phi_2$$

Exercice

interprétation J : domaine D_J: N

relation r_J : <

valuation σ : $x \to 8$, $y \to 2$, $y_1 \to 5$

J ? $\neg \phi_1$

J ? $\phi_1 \vee \phi_2$

$I \models_\sigma \phi$ (suite)

$\boxed{I \models_\sigma \phi}$ (suite)

σ satisfait ϕ dans I

$\boldsymbol{\phi \equiv \forall\ \phi_1}$: Si l'une des formules obtenues en substituant un élément de D à toutes les occurences libres de x dans ϕ_1 est fausse dans I, alors ϕ est fausse, sinon ϕ_1 est satisfiable dans I (si ϕ_1 n'a pas d'autre variables libres que x, ϕ est valide dans I)

$\boldsymbol{\phi \equiv \exists\ x\ \phi_1}$: Si l'une des formules obtenues en substituant un élément de D à toutes les occurences libres de x dans ϕ_1 est satisfiable dans I, alors ϕ est satisfiable dans I, sinon, si ϕ_1 n'a pas d'autre variables libres que x, ϕ est fausse dans I

Exemple

F = {f (1-aire)}, R ={eq (2-aire)}

Interprétation I :

domaine : {1, 2, 3}

relation eq : $(x,y) \rightarrow x = y$

fonction f_I : $x \rightarrow x + 1$

formule : $\phi \equiv eq(x,f(y))$

valuation σ : $x \rightarrow 1, y \rightarrow 2$

$I \models_\sigma \exists x\, \phi$ il suffit de prendre σ (x | 3)

$I \not\models_\sigma \forall x\, \phi$ car σ (x | 2) ne satisfait pas ϕ dans I

Définitions

$\boxed{I \models_\sigma \phi}$ ϕ est satisfiable dans I

$\boxed{I \models \phi}$ ϕ est valide dans I ssi $I \models_\sigma \phi$ pour tout σ

On dit alors que I est un modèle de ϕ

$\boxed{I \not\models \phi}$ ϕ est fausse dans I ssi $I \not\models_\sigma \phi$ pour tout σ

On dit aussi que ϕ est insatisfiable dans I

$\boxed{\models \phi}$ ϕ est un théorème (ou universellement valide) ssi $I \models \phi$ pour tout I

$\boxed{\tau \models \phi}$ ϕ est conséquence logique de la théorie τ ssi $\models \tau \Rightarrow \phi$

Exemple

$\phi \equiv \forall\ x, x + 1 > x$

Interprétation I: domaine : les entiers, + addition, > supérieur

$$I \models \phi$$

$\phi \equiv \forall\ x, x + 1 < x$

Interprétation I : les entiers, + addition, < inférieur

$$I \not\models \phi$$

$\phi \equiv \forall\ x, p(x) \vee \neg\, p(x)$

$$\models \phi$$