Théorie des jeux
Jeux évolutionnistes (-naires ?)
Jeux spaciaux

Licence 3 - Introduction aux systèmes complexes

Sébastien Verel
verel@i3s.unice.fr
www.i3s.unice.fr/∼verel/TEACHING/11-12/introSC/index.html

Équipe ScoBi - Université Nice Sophia Antipolis

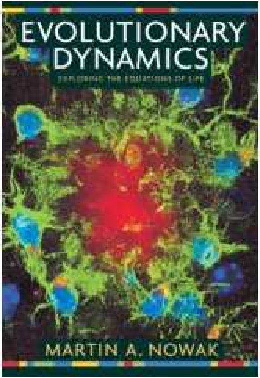
23 février 2012

Plan

Evolutionary games

Ce cours est basé sur les travaux et le livre de Martin A. Nowak

- M.A. Nowak, Evolutionary Dynamics ed. The Belknap press of Harvard University press, 2006.



Une vidéo (et slides) d'une présentation à Harvard en 2004 :
`http://athome.harvard.edu/programs/evd/evd_video/evd_1.html`

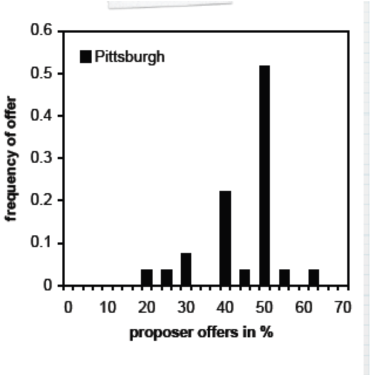
Jeux de l'ultimatum

- on offre 100 euros à 2 joueurs s'ils se mettent d'accord sur le partage
- On lance une pièce pour décider qui prend le rôle de celui qui propose et qui prend le rôle de celui qui reçoit
- Une offre est faite par celui dont c'est le rôle
- Le "receveur" peut accepter ou refuser :
  - s'il accepte, l'argent est partagé
  - S'il refuse, personne ne reçoit d'argent

Jeux de l'ultimatum : résultat

Résultats :

- La majorité (66%) des offres sont entre 40% et 50% et sont acceptées
- Peu d'offres sont inférieures à 20% et la majorité alors rejetée



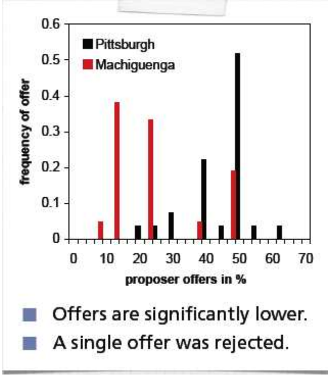
Interprétation :

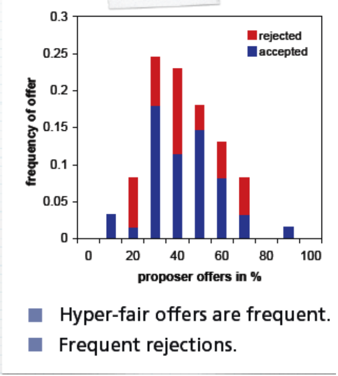
→ hypothèse de rationalité : offre la plus petite possible et acceptable

→ résultats peu dépendants de la somme, du sexe, de la religion ou du pays...

Jeux de l'ultimatum

Machiguenga (Pérou) vs Au and Gnau (Papouasi nouvelle Guinée)





Jeux de l'ultimatum
Quelques conclusions

- L'habitude du commerce et du marchandage détermine la notion d'équité
- L'offre 50/50 est considérée comme équitable, 40/60 tolérable
- une offre trop faible est considérée comme une offense personnelle
- Toutefois, personne n'est offensé et accepte une offre faible lorsque :
  - l'affectation des rôles n'est pas aléatoire mais résulte d'une compétition
  - un ordinateur fait l'offre

Jeux de l'ultimatum

Quelques conclusions : interprétation par l'interaction sur l'ensemble de la population

- Les personnes sont très sensibles aux injustices :
  - les "offreurs" proposent un cadeau avec un certain coût : action coopérative
  - les "décideurs" se vengent d'une offre faible avec un certain cout : punition
  - offres équitables empêchent la punition : la punition renforce la coopération

Le problème de la coopération

- groupe de défense et fouragement
- surveillance de prédateur et appel d'alarme
- protection sociale
- viabilité globale de certains systèmes

$\longrightarrow$ conflit d'intérêt entre les performances d'un individu et d'une communauté

Dilemme social

Définition

- Les coopérateurs soutiennent le bien commun malgré un certain coût personnel
  alors que les traitres tentent d'exploiter les ressources en évitant le coût de cette exploitation
- un groupe de coopérateurs fait mieux qu'un groupe de traitres
- les traitres font mieux que les coopérateurs dans chacun des groupes (coopérateurs ou traitre)

$\Longrightarrow$ Situation de dilemme social

Un jeux itéré pour vous (inspiré de J.P. Delahaye)

- les murs n'étant pas très épais : 2 voisins peuvent entendre la musique de l'autre
- hard rock punk hard à 22h de l'un
- Le lendemain l'autre voisin : hard rock méga punck
- réagir ou pas pour calmer plus rapidement ?

Un jeux itéré pour vous (inspiré de J.P. Delahaye)

10 parties pour ce jeux à 2 joueurs :

	Silence	Rock
Silence	3	0
Rock	5	1

- Si Joueur 1 = Silence et Joueur 2 = Silence alors joueur 1 gagne 3 points : J1 et J2 gagne par la tranquilité de l'environnement
- Si Joueur 1 = Silence et Joueur 2 = Rock alors joueur 1 gagne 0 point : J1 doit supporter son voisin, aucun gain.
- Si Joueur 1 = Rock et Joueur 2 = Silence alors joueur 1 gagne 5 points : J1 gagne parce qu'il est content de déranger son voisin sans en subir les conséquences
- Si Joueur 1 = Rock et Joueur 2 = Rock alors joueur 1 gagne 1 point : J1 gagne peu parce qu'il subit aussi des conséquences de sa nuisance

Un jeux itéré pour vous (inspiré de J.P. Delahaye)

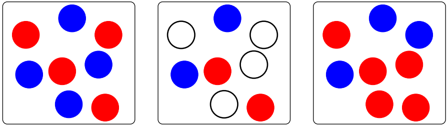
10 parties pour ce jeux à 2 joueurs :

	Silence	Rock
Silence	3	0
Rock	5	1

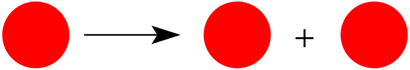
- Quel est votre gain ?
- Quel est le gain total des 2 joueurs ?
- Comparer ces gains avec le gain maximal ?

Jeux évolutionnistes

- Population de "joueurs" :
  chaque joueur adopte l'une des 2 stratégies possibles
- Les joueurs ne changent pas stratégie :
  ils disparaissent (meurent) au profit de ceux qui ont les meilleurs performances qui se reproduisent
- Variation de la taille des populations est proportionnelle à :
  - la taille de la population
  - la performance de la stratégie (fitness)
- Performance de la stratégie (fitness) dépend de la taille des 2 sous-populations de joueurs



Reproduction



- Imaginons des cellules qui se divisent toutes les 20 minutes
- Combien de cellules au bout de 3 jours s'il y a assez de nourritures ?

$$x_{t+1} = 2x_t$$

- x_t : nombre de cellules au temps t
- x_{t+1} : nombre de cellules au temps $t+1$

pour tout $t \geq 0$,

$$x_t = x_0 2^t$$

Reproduction
équation différentielle

$x_{t+1} = kx_t$ équivalent à $x_{t+1} - x_t = rx_t$ avec $r = k - 1$

plus généralement,

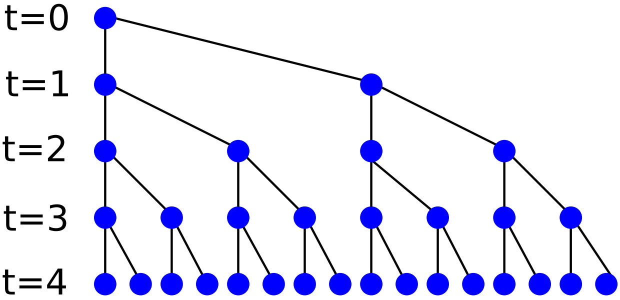
$$\text{pour tout } \delta > 0,\ x_{t+\delta} - x_t = \delta r x_t$$

d'où équation différentielle associée
(ex. de passage discret − continu) :

$$\dot{x} = rx$$

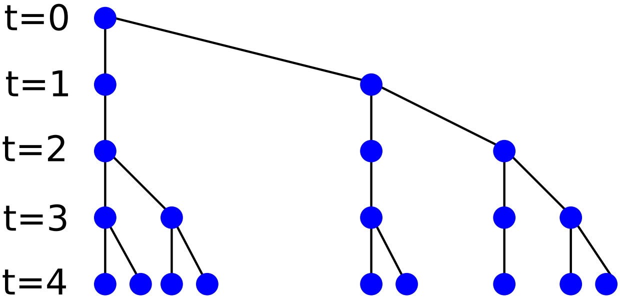
Qui signifie :
La variation du nombre de cellules est proportionnelle à la taille de la population.

Reproduction



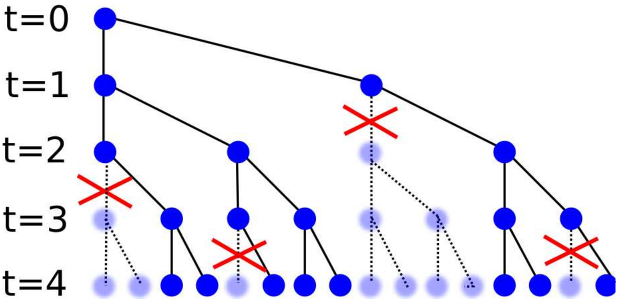
$r = 1$

Reproduction



$r \approx 0.75$

Disparition : Cellules meurt



$$d \approx 0.5$$

Disparition
Cellules mortelles

Mais les cellules meurent !

- Introduction d'un taux de mortalité d

$$\dot{x} = (r - d)x$$

Dynamiques possibles

- si $r > d$: la taille de la population augmente indéfiniment
- si $r < d$: la population s'éteint
- Si $r = d$: la taille de la population reste constante, mais la situation est instable.
  une petite variation provoque l'expansion ou la disparition

Jeux évolutionnistes / évolutionnaires

- Population de "joueurs" :
  chaque joueur adopte 1 stratégie parmi { A, B }
- Variation de la taille des populations est proportionnelle à :
  - la taille de la population
  - la performance de la stratégie (fitness)

$$\dot{x}_A = x_A f_A$$

$$\dot{x}_B = x_B f_B$$

Taille de population constante : pression de sélection

Processus de mort et naissance

- La taille de la population de joueurs reste constante

$$x_A + x_B = 1$$

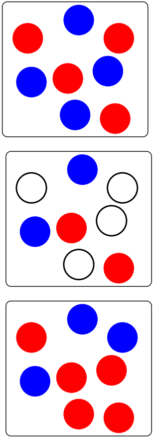
- Taux de mortalité identique dans chaque sous-population : m

$$\dot{x}_A = x_A(f_A - d)$$

$$\dot{x}_B = x_B(f_B - d)$$

d'où $d = x_A f_A + x_B f_B$ (fitness moyenne)

exemple $f_A = 2$ et $f_B = 1$



Evolution sous sélection constante

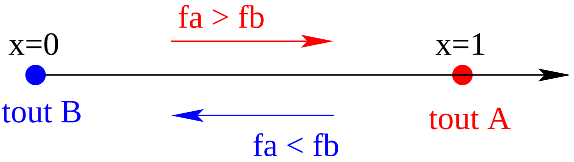
En posant :

$x_A = x$

$x_B = 1 - x$

On en déduit par substitution :

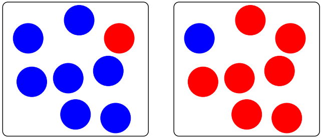
$$\dot{x} = x(1-x)(f_A - f_B)$$



Jeux évolutionnistes : sélection non constante

- Dans la théorie des jeux évolutionnnaires :
  gain (fitness) de la stratégie dépend de la taille des populations

fitness A = 2 fitness A = 1



fitness A > fitness B fitness A < fitness B

Fitness constante

la fitness dépend de la composition de la population, de la taille de chaque sous-population

Jeux à 2 joueurs

Les fitness dépendent de x_A et x_B :

$$f_A = f_A(x_A, x_B) \text{ et } f_B = f_B(x_A, x_B)$$

$$\dot{x}_A = x_A[f_A(x_A, x_B) - d]$$
$$\dot{x}_B = x_B[f_B(x_A, x_B) - d]$$

Comment définir les fonctions de gain (fitness) f_A et f_B ?

Jeux à 2 joueurs

	A	B
A	a	b
B	c	d

- A gagne le gain a lorsqu'il joue contre A
- A gagne le gain b lorsqu'il joue contre B
- B gagne le gain c lorsqu'il joue contre A
- B gagne le gain d lorsqu'il joue contre B

Rencontre aléatoire des joueurs.
Chaque joueur rencontre :

- A avec une probabilité x_A
- B avec une probabilité x_B

fitness = espérance du gain :

$$f_A = ax_A + bx_B$$

$$f_B = cx_A + dx_B$$

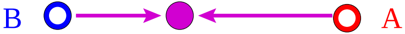
5 Dynamiques possibles

- A domine B, si $a > c$ et $b > d$

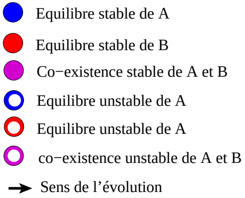
- B domine A, si $a < c$ et $b < d$

- A et B sont bi-stable, si $a > c$ et $b < d$

- A et B co-existent, si $a < c$ et $b > d$



- A et B sont neutres, si $a = c$ et $b = d$



Pause historique et bibliographique

- Théorie des jeux inventée par John Von Neumann et Oskar Morgenstein (1944)
- John Nash "This man is genius" : prix Nobel en 1950, équilibre de Nash
- Domaine scientifique : John Maynard Smith, Price (1973), application à la biologie et l'évolution des populations
- J.M. Smith : evolutionarily Stable Strategy
- essor dans les années 1990 et 2000
- Hofbauer et Sigmund : "Evolutionary Game and population dynamics". Cambridge : Cambridge university Press, 1998.

La théorie des jeux ne repose pas sur la rationalité. Population de joueurs de stratégie fixe. Interaction aléatoire. Le gain est interprété comme une fitness, un taux de reproduction.

Equilibre de Nash

Jeux à 2 joueurs

Si les 2 joueurs jouent la stratégie qui est un équilibre de Nash,
Alors aucun des 2 joueurs peut changer de stratégie et augmenter son gain

	A	B
A	a	b
B	c	d

- A est un équilibre de Nash strict si $a > c$
- A est un équilibre de Nash si $a \geq c$
- B est un équilibre de Nash strict si $d > b$
- B est un équilibre de Nash si $d \geq b$

Equilibre de Nash

	A	B
A	3	0
B	5	1

B équilibre strict de Nash

	A	B
A	3	1
B	5	0

A et B ne sont pas des équilibres de Nash

	A	B
A	5	0
B	3	1

A et B sont des équilibres stricts de Nash

Evolutionarily Stable Strategy (ESS) - J. Maynard Smith

Imaginons une large population de joueurs A.
Un mutant de type B est introduit dans la population.
Quelle est la condition sur la sélection permette l'invasion de B ?

posons $x_B = \epsilon$

$$f_A > f_B \text{ donne } a(1-\epsilon) + b\epsilon > c(1-\epsilon) + d\epsilon$$

en négligeant les termes en ϵ (quand on peut) :

$$a > c, \text{ ou } a = c \text{ et } b > d$$

Evolutionarily Stable Strategy

A est un ESS ssi soit $a > c$, soit $a = c$ et $b > d$.

strict Nash $\Rightarrow$ ESS $\Rightarrow$ weak ESS $\Rightarrow$ Nash

Faucon ou Colombe (Hawk or Dove) ?

- Les animaux d'une même espèce se battent entre eux :
  Conflit pour la nourriture, le territoire, le sexe, etc.
- Toutefois les conflits n'escaladent pas tous :
  combats conventionnels, peu de combat mène à de sérieux dégâts
- Explication classique : combats conventionnels existent car ils sont bons pour l'espèce.
  Les combats terribles sont mauvais pour l'espèce
- Problème :
  - vrai au niveau d'un groupe ou d'une espèce, mais la sélection agit sur les individus
  - Si un individu désobéit à la règle et inflige des dégâts à l'adversaire, il doit en tirer un avantage reproductif

Faucon ou Colombe ? - J. Maynard Smith

2 espèces :

- H : Faucons qui font monter le combat
- D : Colombes qui se retirent toujours d'un combat

Gains :

- b : gain d'avoir gagné un combat
- c : cout de la perte

	H	D
H	$\frac{b-c}{2}$	b
D	0	$\frac{b}{2}$

Gains :

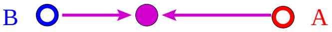
- un faucon face à une colombe gagne b contre 0
- lorsque 2 animaux de la même espèce se rencontrent, il partage le paiement.

Faucon ou Colombe ?

	H	D
H	$\frac{b-c}{2}$	b
D	0	$\frac{b}{2}$

Si $b < c$:

- Pas d'équilibre de Nash
- Co-existence des espèces : proportion de faucons $\frac{b}{c}$



Jeux de la poule mouillée

2 voitures roulent face à face à grande vitesse, le perdant est celui qui sort en premier de sa voiture

2 stratégies :

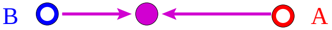
- A : on reste dedans
- B : on saute après un certain temps

Gains et perte :

- $-c$: perte due à la collision
- b : gain si gagnant

	A	B
A	$-c$	b
B	0	$\frac{b}{2}$

- pas d'équilibre de Nash
- Co-existence des stratégies



Dilemme des prisonniers

Deux prisonniers se font prendre, ils sont interrogés séparément.

2 stratégies :

- Soit il dénonce son camarade (défection D)
- Soit il coopère et reste silencieux (coopération C)

traduction en années de prison :

	C	D
C	-1	-10
D	0	-7

Que faire ? ? ? ?

Dilemme des prisonniers

traduction en gain :

	C	D
C	3	0
D	5	1

- Dynamique d'évolution vers traitrise

Dilemme des prisonniers

	C	D
C	R	S
D	T	P

- $T > R$
- $P > S$
- $R > P$
- Et même : $R > (T + P)/2$: pour garantir que l'alternance est moins bonne que la coopération

- Défection est un équilibre de Nash
- La coopération mutuelle est plus avantageuse que la défection

Pas de coopération avec une dynamique évolutionniste

Dilemme des prisonniers itéré : réciprocité directe

Le jeux est répété m fois.
2 stratégies :

- GRIM : coopère la première fois jusqu'à la première traitrise adversaire
- ALLD : toujours la défection

	GRIM	ALLD
GRIM	mR	$S + (m-1)P$
ALLD	$T + (m-1)P$	mP

- si $mR > T + (m-1)P$, GRIM est un équilibre de Nash : la coopération se maintient

$$m > \frac{T-P}{R-P}$$

- ALLD est aussi un équilibre de Nash :
  GRIM n'explique pas l'apparition de la coopération

Oeil pour oeil : tit-for-tat
Tournoi d'Axelrod

stratégie tit-for-tat :

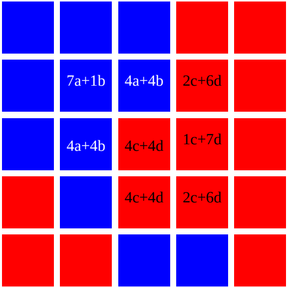
- TFT : coopération, puis reproduit la stratégie de l'adversaire

- Tournoi gagné face à des stratégies inconnues
- TFT ne reste pas bloqué dans la traitrise

	TFT	ALLD
TFT	mR	$S + (m-1)P$
ALLD	$T + (m-1)P$	mP

Définition

- La population de joueurs est disposée sur une grille
- A chaque partie, chaque joueur joue avec ses 9 voisins
- Le paiement total est calculé
- les joueurs adoptent la stratégie du joueur voisin avec le plus grand gain s'il est supérieur au sien

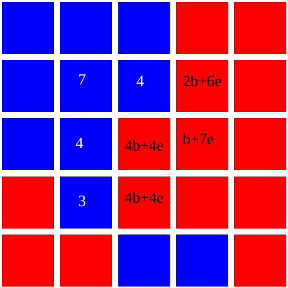


	A	B
A	a	b
B	c	d

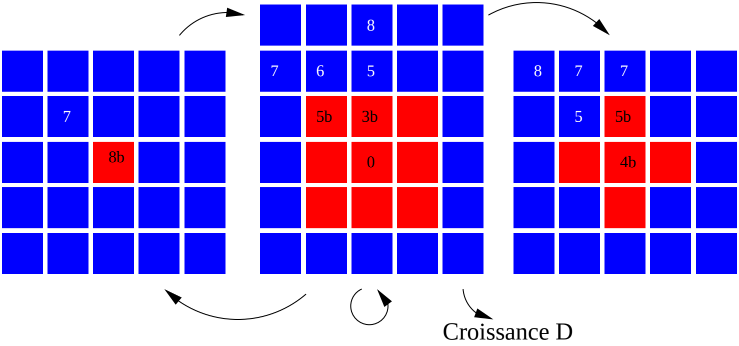
Un cas simple

	C	D
C	1	0
D	b	ϵ

- $b > 1$: C n'est pas un équilibre de Nash
- ϵ proche de 0 : pour départager les cas d'égalité

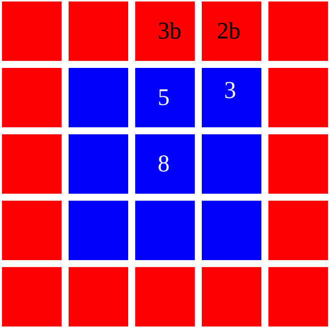


Les traitres envahissent les coopérateurs



Trouvez les conditions sur chaque transition.

Les coopérateurs envahissent les traitres



Condition : coin-et-ligne