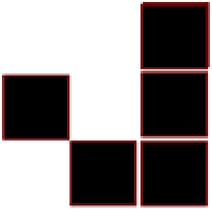
Automates Cellulaires

Licence 3 - Introduction aux systèmes complexes

Sébastien Verel
verel@i3s.unice.fr
www.i3s.unice.fr/∼verel/TEACHING/11-12/introSC/index.html

Équipe ScoBi - Université Nice Sophia Antipolis

2 février 2012



Quelques brefs repères historiques

- 1940, Stanislaw Ulam (Los Alamos) : modélisation de la croissance des cristaux
- 1940, John Von Neumann (Los Alamos) : système auto-réplicatif, robot qui se copie tout seul
  Naissance du premier automate cellulaire
- 1970, John Conway : Jeu de la vie

Composants d'un automate cellulaire

- Une grille de n éléments appelés cellules

1	2	$\ldots$	n

- Un ensemble d'états, aussi appelé alphabet,

$$A = \{0, 1\}$$

- Un voisinage

$$I = \{-1, 0, 1\}$$

- Une table appelée règle locale

$$f : \{0,1\}^3 \longrightarrow \{0,1\}$$

$\{0,1\}^3$	000	001	010	011	100	101	110	111
f	1	0	1	1	0	1	1	0

Configuration

Définition

Une configuration est l'affectation à chaque cellule d'un état

$$x = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{3} & \multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{7} & \multicolumn{1}{c}{8} & \multicolumn{1}{c}{9} & \multicolumn{1}{c}{10} \\ \hline & & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$x = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{3} & \multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{7} & \multicolumn{1}{c}{8} & \multicolumn{1}{c}{9} & \multicolumn{1}{c}{10} \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

- Une configuration est une fonction :

$$x : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{0, 1\}$$

- De façon équivalente, un vecteur :

$$x \in \{0, 1\}^n$$

Mise à jour d'une configuration

- L'état de chaque cellule est mise à jour de manière synchrone, *i.e.* dans le même instant
- La mise à jour est faite de manière locale par la règle locale...
- ... appliquée en fonction de l'état courant de la cellule et des états des cellules voisines

$$x = \begin{array}{c|c|c|c|c} \hline \ldots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \ldots \\ \hline \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad x_{i-1} \qquad x_i \qquad x_{i+1} \qquad}_{f}$$

$$x' = \begin{array}{c|c|c|c|c} \hline \ldots & \phantom{x_{i-1}} & x_i' & \phantom{x_{i+1}} & \ldots \\ \hline \end{array}$$

Condition aux limites

			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
x	$=$	?	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	?
x'	$=$	?	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	?

Problèmes des extrémités

Plusieurs solutions :

- Mettre les extrémités dans un état arbitraire (fixe ou non)

			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
x	$=$	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0

- Faire "boucler" le réseau d'automates : l'extrémité gauche correspond à la cellule n et l'extrémité droite correspond à la cellule 1

			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
x	$=$	x_n	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	x_1

Exemple d'évolution

$\{0,1\}^3$	000	001	010	011	100	101	110	111
f	0	0	0	1	1	1	0	1

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$x(0) =$	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
$x(1) =$	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
$x(2) =$	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
$x(3) =$	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
$x(4) =$	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
$x(5) =$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Système dynamique associé

Un automate cellulaire défini un système qui :

- Dépend du temps :
  un état du système est une configuration $x(t)$
- Dont l'état futur dépend des états présent et passés
- Evolution de manière déterministe :
  pas d'ambiguïté, pas d'aléatoire

Un automate cellulaire est un système dynamique

Définition

$\langle X, F \rangle$ est le système dynamique associé à un AC où :

- $X = \{0,1\}^n$, ensemble des configurations du système
- $F : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}^n$, fonction de transition globale :

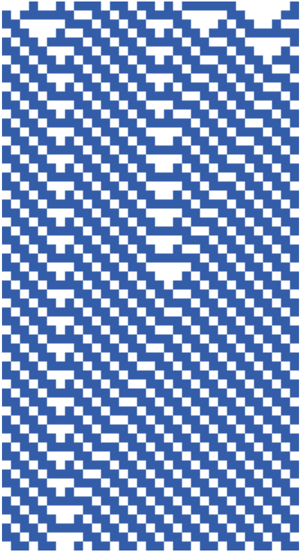
$$\forall x \in \{0,1\}^n \;\; \forall i \in \{1, \ldots, n\} \;\; F(x)_i = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

On peut représenter l'évolution verticalement...

			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$x(0)$	$=$	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
$x(1) = F(x(0))$	$=$	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
$x(2) = F(x(1))$	$=$	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
$x(3) = F(x(2))$	$=$	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
		....											
$x(t) = F^t(x(0))$	$=$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Diagramme Espace-Temps

... et graphiquement, en associant une couleur à chaque état



Définition

Un automate cellulaire (AC) est quadruplet $(\mathcal{L}, A, I, f)$ où :

- $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^D$ est une grille régulière de cellules
- A est un ensemble fini d'états
- $I = \{u_1, u_2, \ldots, u_s\} \subset \mathbb{Z}^D$ un voisinage
- $f : A^{|I|} \longrightarrow A$ une règle locale

Configuration

Une configuration est une fonction $x : \mathcal{L} \rightarrow A$ qui associe à chaque cellule $v \in \mathcal{L}$ l'état $x_v \in A$

Système dynamique associé

Définition

$\langle X, F \rangle$ est le système dynamique associé à l'AC $(\mathcal{L}, A, I, f)$ où :

- $X = A^{\mathcal{L}}$, ensemble des configurations du système
- $F : A^{\mathcal{L}} \longrightarrow A^{\mathcal{L}}$, fonction de transition globale :

$$\forall x \in A^{\mathcal{L}} \;\; \forall v \in \mathcal{L} \;\; F(x)_v = f(x_{v+u_1}, \ldots, x_{v+u_s})$$

A partir d'une configuration initiale $x(0)$ on obtient la dynamique :

$$x(0) \xrightarrow{F} x(1) \xrightarrow{F} x(2) \xrightarrow{F} x(3) \xrightarrow{F} \ldots$$

Nombre de règles élémentaires

Combien de régles élémentaires pour l'AC classique avec $A = \{0, 1\}$ et $I = \{-1, 0, 1\}$?
Combien de tables de régle locale ?

$\{0,1\}^3$	000	001	010	011	100	101	110	111
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7

$$2^{2^3} = 256 \text{ régles élémentaires}$$

On peut numéroter les régles par un nombre entier entre 0 et 255 :

$$n_f = f_0.2^0 + f_1.2^1 + f_2.2^2 + f_3.2^3 + f_4.2^4 + f_5.2^5 + f_6.2^6 + f_7.2^7$$

C'est rigolo, mais...

C'est bien rigolo tout ça, mais à quoi ça sert ?

- A modéliser (et étudier) des systèmes physiques, chimiques, biologique, sociaux, etc. :
  - Traffic routier,
  - Changement d'opinion,
  - Problème de synchronisation,
  - Gaz,
  - Phénomène de croissance, cristallisation (flocon, développement embryon, etc.)
- A étudier ce qu'on peut calculer : modèle de calcul
  Simulation de machines à calculer (machine de Turing, etc.)

Modélisation du traffic automobile

- Le réseau représente la route
- 0 espace, 1 voiture
- 1 seule voiture par unité d'espace
- Les voitures roulent de gauche à droite
- Elles ne peuvent avancer que si l'espace à droite est vide (pour éviter les accidents)

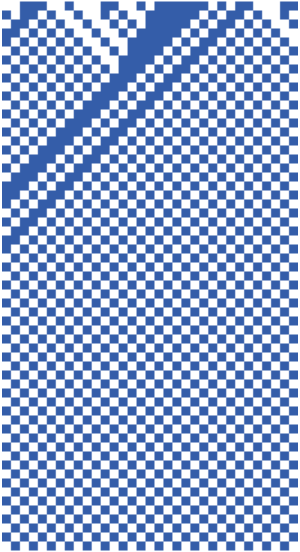
$\{0,1\}^3$	000	001	010	011	100	101	110	111
f								

$\{0,1\}^3$	000	001	010	011	100	101	110	111
f	0	0	0	1	1	1	0	1

Observation

- Etat stable ?
- Etat transitoire ?
- Zone régulière (langage régulier) : Signaux
- Frontières : rencontre de signaux

- On voit les bouchons remonter comme un écoulement fluide



Modélisation du changement d'opinion

- Une cellule représente une personne
- 0 de l'opinion A, 1 de l'opinion B
- Prend l'opinion de la majorité (dans son voisinage)

$\{0,1\}^3$	000	001	010	011	100	101	110	111
f								

$\{0,1\}^3$	000	001	010	011	100	101	110	111
f	0	0	0	1	0	1	1	1

Observation

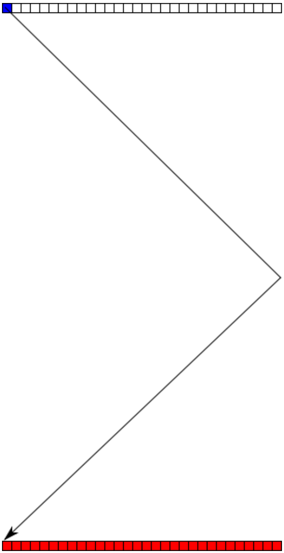
- Etat stable ?
- Etat transitoire ?
- Signaux ?
- Frontières ?

- Les opinions dans une zone minoritaire disparaissent
- Les frontières sont stables

Synchronsation du ligne de fusilliers

Problème

- Problème posé par Minsky en 1967
- Prototype "minimal" du problème de synchronisation
- Partant d'une configuration donnée : un général à gauche donnant l'ordre, les soldats étant au repos
- Les soldats doivent être dans le même état "feu" quand l'information a circulé dans le réseau



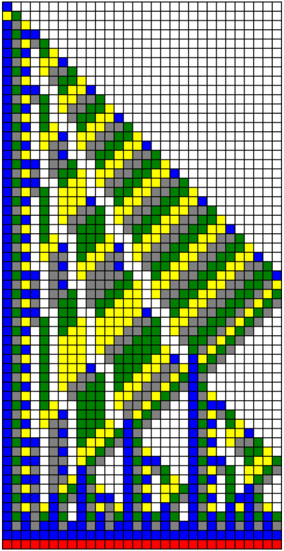
Synchronsation du ligne de fusilliers

Une solution

- Mazoyer 1987
- Solution en temps minimal avec 6 états
- Le problème reste ouvert avec 5 états

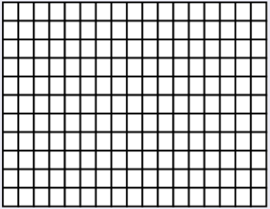
Problème fondamental

- A partir d'une régle locale,
- Emergence d'un comportement global (synchronisation)



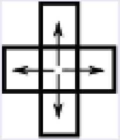
Même définition bien sùr.

- Grille est de dimension 2 :

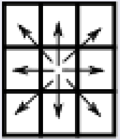


- Voisinage :

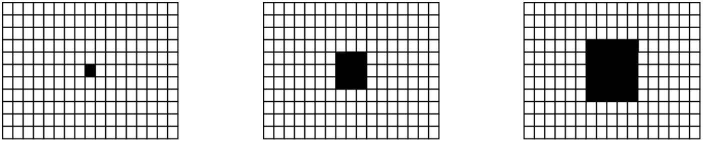
Von Neumann
5 cellules



Moore
9 cellules



D'abord exemple très simple



...

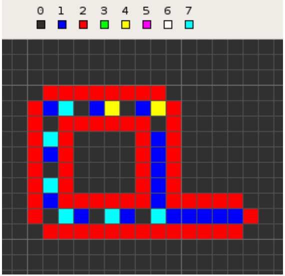
Sauriez-vous trouver les régles élémentaires ?

A la recherche de principes permettant l'auto-réplication

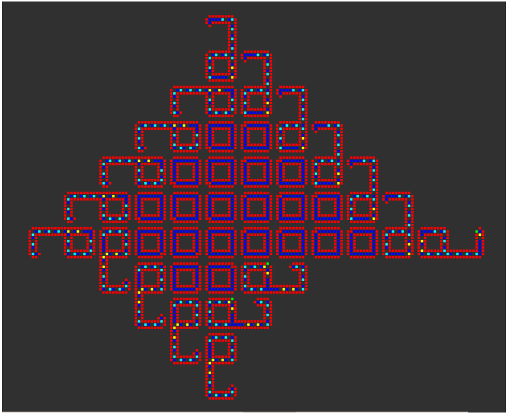
- Automate de Von Neumann (1947) :
  - 29 états, construit à partir d'une propriété d'universalité
  - Organisation logique suffisante pour assurer l'auto-réplication
  $\Rightarrow$ Preuve conceptuelle et effective de la simplicité des mécanismes d'auto-réplication
- Automate de Langton :
  - Considérer que les éléments nécessaires, pas d'universalité

Automate de Langton

- 8 états, 29 régles élémentaires,
- Fabrication d'une 'membrane' et transport du matériel 'génétique' reproducteur



Automate de Langton



Jeu de la vie

- Une modélisation d'un processus de vie et de mort d'individus
- 1 : cellule active ("vivante"), 0 : cellule inactive ("morte"),
- Grille 2D et voisinage de Moore
- Régles :
  - Une cellule inactive entourée de 3 cellules actives devient active ("naissance")
  - Une cellule active entourée de 2 ou 3 cellules actives reste active
  - Dans tous les autres cas, la cellule reste ou devient inactive ("meurt")

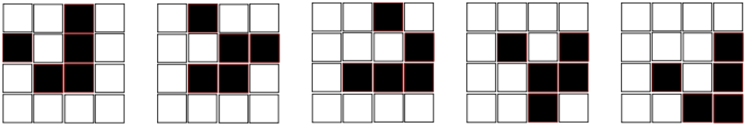
- Beaucoups "d'objets" vivent dans ce monde fantastique
- Simulation d'une machine de Turing possible

Stable et périodique

Motifs stables :

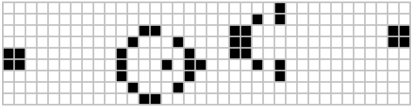
Motifs périodiques (période 2) :

$t = 0$ $\quad t = 1$ $\quad t = 2$ $\quad t = 3$ $\quad t = 4$



- Période temporelle 4
- Déplacement spacial : translation de $(+1, +1)$

Canon à gliders



	Temps	Espace	Variables
Equa. Diff.	continu	(continu)	continu
Suite	discret		discret/continu
AC	discret	discret	discret

Modélisation stochastique / déterministe

Passage d'un modèle discret à un modèle continu

Cf. notes d'Annick Lesne, Ecole 'biologie intégrative : l'organisation du vivant', 2002.

- Lorsque trop grand nombre d'éléments rend inopérant leur description (trop grand nombre de degré de liberté)
- Lorsque l'échelle d'observation est très supérieure à l'échelle typique des phénomènes élémentaires

Méthodes, techniques

- Moyenne locale instantanées : ex. température
  Valable dans une certaine "limite continue",
  contient assez d'éléments
- Homogénéisation : ex. milieux poreux
  milieu inhomogène à petite échelle,
  apparait comme homogène à plus grande échelle
- Distribution de probabilité d'une observable individuelle :
  remplacer la trajectoire (x_t) par une mesure invariante, *i.e.* distri. de proba. de présence instantanée, en régime stationnaire

Passage d'un modèle continue à un modèle discret

- Elagage adéquat des degrés de liberté
- Permet l'étude numérique (informatique !), approche analytique (énumération exacte)

- Modéle de percolation : ex. Milieux poreux, alliages, gels de polymère, épidémie
  Discrétisation en cellules (site) et/ou liens
  On ignore les propriétés physiques, chimique, biologique de l'occupation d'un site
  Information qualitative sur l'état du site et/ou du lien

  Emergence de propriétés universelles liée à la géométrie, et non aux phénomènes physiques
- Modéle de section de Poincaré :
  mesure de la variable en des points particuliers de la dynamique (section de Poincaré)
  Discrétisation intrinsèque adapté à la dynamique

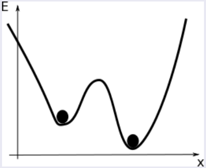
Emergence de comportement

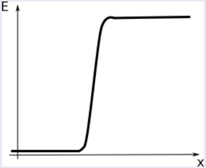
Emergence d'un comportement continu

- Fluide : ensemble de particules, caractérisé par vitesse, etc.
- Sable : écoulement du sablier
- Le traffic automobile (cf avant)

Emergence d'un comportement discret

- Comportement discret émergent : dynamique avec plusieurs états stables
- Milieux excitables : milieux monospable, réponse fortement non-linéaire (sigmoïde)





Un peu de netLogo : les patches

Patch

- Agent statique de netLogo
- caractéristiques des patches :

  `pxcor, pycor, pcolor, plabel`
- iteration sur l'ensemble des patches :

  ```
  ask patches [ ... ]
  ask patches with [ ... ] [ ... ]
  ```
- Patch de coordonnées (x, y) :

  `patch x y`
- Patch (dx, dy) relativement à la position courante :

  `patch-at dx dy`

of : pour obtenir la valeur d'une variable d'un agent particulier :

```
[ variable ] of turtle 0
[ pcolor ] of patch 0 10
```

Conclusion

Les automates Cellulaires

- Modéle fondamental de système dynamique discret
- Modéle de calcul
- Variété des dynamiques, émergence de propriétés
- De nombreuses extensions possibles : asynchrone, stochatique, variable continue, réseau d'automates non régulier, etc.