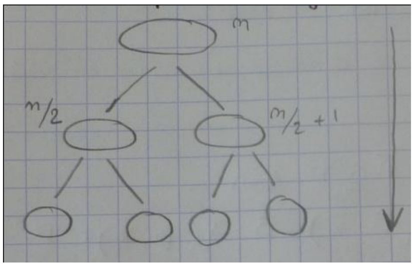
# Etudes et Analyses des Algorithmes

**Programmation dynamique**

1952 par BELLMAN

Diviser pour regner

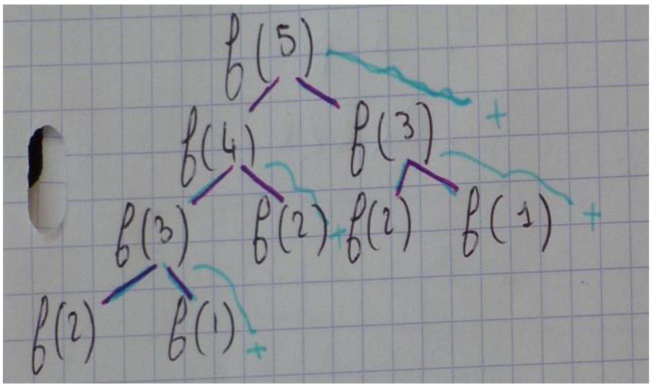



$fib(n)$

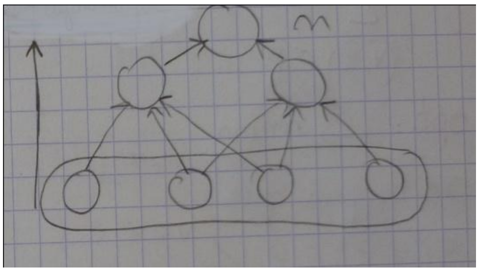
$\quad if\ n \leq 2$

$\qquad return\ 1$

$\quad else\ return\ (fib(n-1) +\ fib(n-2)$




Programmation dynamique




Du bas vers le haut → dynamique

Du haut vers le bas → diviser pour regner

$fib[1] =\ 1$

$fib[2] =\ 2$

$for\ i\ \in [3, n]$

$\qquad fib[i] =\ fib[i-1\ ] +\ fib[i-2]$

$return\ fib[n]$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| fib | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 |
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

**Faire de la monnaie**

I : P = $\{(v, k) \ / \ V > 0 \ k > 0\} \ x \ \in \mathbb{N}$

v valeur de la pièce, k le nombre de pièce, x le nombre qu'on veux avoir avec un minimum de pièce

S : $\{ \ \bar{P} \ \subseteq P \ / \ \sum \bar{v} * \ \bar{k} \ = x\}$

$\bar{P}$ sous ensemble de P, $(\bar{v}, \bar{k}) \in \bar{P}$

$f \ : \ \sum_{(\bar{v},\bar{k}) \in \bar{P}} \bar{k}$

Opt : $\rightarrow min$

On suppose que :

$\exists (v, k) \in P \ : \ \begin{cases} v = 1 \\ k \geq x \end{cases}$

$\bar{P} \in P \ \Leftrightarrow$

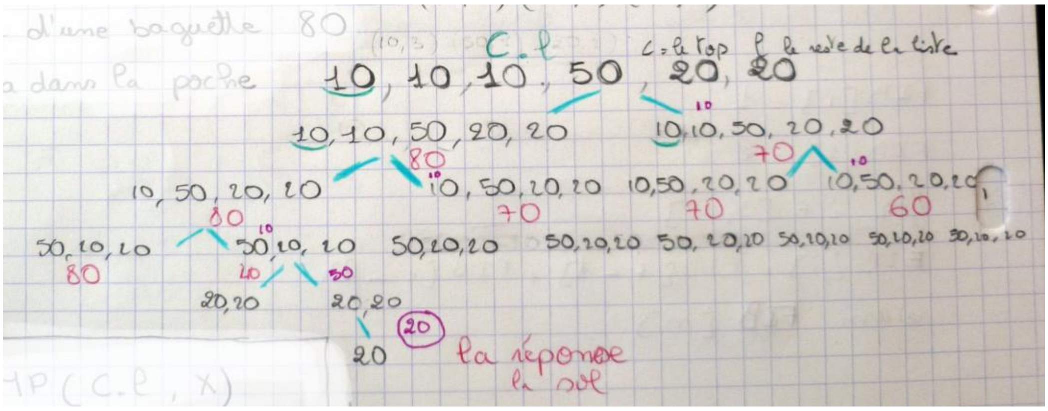
$\forall (\bar{P}, \bar{k}) \in \bar{P} \ \exists (p, k) \in P \ tq \ :$

- $\bar{p} = p$
- $0 < \ \bar{k} < k$

Exemple :

Prix d'une baguette 80 centimes

On a dans la poche :




$MP(c.l, x)$

$\min\ (MP(l, x), 1 + MP(l, x - c))$

$MP(l, x)$:

$c > x \ \Rightarrow MP(c \ . l, x) = MP(l, x)$

$c \leq x \ \Rightarrow \ MP(c.l, x) = \ \min\ (MP(l, x), c. MP(l, x - c) + 1)$

$x = 0 \ \Rightarrow MP(\emptyset, x) = \ 0$

$x \ \neq 0 \ \Rightarrow MP(\emptyset, x) = (\bot)$

$MP[i,j] = \min(MP[i-1,j], MP[i,j-v_i])\ avec\ j \geq v_i$

| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 2 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 |
| 6 | 3 | 0 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |

$P_1 = 1, P_2 = 4, P_3 = 6$

$MP[2,5] = 2$ $\quad$ $MP[2,7] = 4$ $\quad$ $MP[3,8] = 2$

$MP[2,3] = 3$ $\quad$ $MP[3,7] = 2$ $\quad$ $MP[3,9] = 3$

$for\ i \in [1 \ldots n]$

$\quad MP\ [1,0] = 0$

$for\ j \in [0 \ldots x]$

$\quad MP[1,j] = j$

$for\ i \in [2 \ldots n]$

$\quad for\ j \in [1 \ldots x]$

$\quad\quad if\ v_i > x_i$

$\quad\quad\quad MP[i,j] = MP[i-1,j]$

$\quad\quad else$

$\quad\quad\quad MP[i,j] = \min\ (MP[i-1,j], MP[i,j-v_i] + 1)$

$return\ MP[n,x]$

$\Longrightarrow \mathcal{O}(n * x)$