Corrigé examen Calculabilité et Complexité

Exo 4 année 2006/07 page 1

Q : Sauriez-vous écrire un programme RAM dont la fonction calculée n'est pas p.p.r. ?

R : Non, chaque programme RAM calcule une fonction PPR. Les instructions, séquences et blocs sont PPR, donc forcement tout programme est PPR

Exo 2 année 2007/08 page 2

Q : Considérez la fonction suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} f(n \dot{-} 2) + 2 & si\ n > 0 \\ 0 & si\ n = 0 \end{cases}$$

Est-ce que f est primitive récursive ? Est-ce que f est p.p.r. ?

R :

$f(4) = f(2) + 2 = f(0) + 2 + 2 = 4$

$f(3) = f(1) + 2 = f(0) + 2 + 2 = 4$

$f(5) = f(3) + 2 = 6$

$f(6) = f(4) + 2 = 6$

$f(n) = 2 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \begin{cases} n & si\ n\ mod\ 2 = 0 \\ n + 1 & sinon \end{cases}$

Donc $f(n)$ est PR

Elle est PPR puisque PR ⊂ PPR donc toute fonction PR est PPR

Exo 3 année 2007/08 page 2

Q : Trouver la fonction calculée par le programme du listing ci-contre. Rappelons que les macros $\prod_g(n)$ et $\prod_d(n)$, vues enc ours, servent à extraire la partie gauche de n et la partie droite de n, respectivement.

Par exemple, $\prod_g(n) = x$ et $\prod_d(n) = y$ si $n = <x, y>$

$R_4 = R_4 + 1$

$R_2 = \prod_g(R_0)$

$R_3 = \prod_d(R_0)$

$R_3 = R_3 + 1$

$R_0 = R_2 \dot{-} R_3$

$if\ R_0 \neq 0\ then\ gotof\ 2$

$if\ R_4 \neq 0\ then\ gotof\ 2$

$R_1 = R_1 + 1$

R :

PC	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4
1	$<x,y>$	0	0	0	0
2	$<x,y>$	0	0	0	1
3	$<x,y>$	0	x	0	1
4	$<x,y>$	0	x	y	1
5	$<x,y>$	0	x	$y+1$	1
6	$x \dot{-} (y+1)$	0	x	$y+1$	1

$x \dot{-} (y+1) = 0$ $\qquad$ $x \dot{-} (y+1) \neq 0$

PC	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4
9	$x \dot{-} (y+1)$	0	x	$y+1$	1

Car on passe à l'instruction 7 qui vérifie

si $R_4 \neq 0$ or c'est vrai donc gotof 2

PC	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4
9	$x \dot{-} (y+1)$	1	x	$y+1$	1

Donc c'est la fonction :

$$n = <x, y> \rightarrow \begin{cases} 1\ si\ \prod_g(n) > \prod_d(n) \\ 0\ sinon \end{cases}$$

C'est un prédicat donc

Exo 2 Année 2006/07 page 1

Q : Considérez la fonction suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = \begin{cases} 1 \; s'ily \; a \; 9 \; symbols \; 1 \; consécutifs \; dans \; les \; x \; premiers \; chiffres \; de \; \pi \\ 0 \qquad\qquad\qquad sinon \end{cases}$$

Où $\pi = 301415926535897323846 2 \ldots$ Est-ce que g est p.p.r.

R : $g(n)$ est un prédicat

Donc elle est p.p.r

Et la négation d'un prédicat est aussi p.p.r.

C'est donc une composition de fonction p.p.r., elle est donc forcement p.p.r.