Calculabilité & Complexité – cours du 03/02

On travaille sur des entiers donc toute opération retourne un entier: 7/2 = 3 ; 7/ 3 = 2 ; 7/4 = 1 …

Pour connaitre le résultat de ces divisions, il faut compter le nombre des multiples de chaque diviseur :

7/3 : $1\ 2\ \underbrace{3}_{x}\ 4\ 5\ \underbrace{6}_{x}\ 7 = 2$ 7/2 = $1\ \underbrace{2}_{x}\ 3\ \underbrace{4}_{x}\ 5\ \underbrace{6}_{x}\ 7 = 3$

On voudrait donc une fonction retournant 1 ou 0 selon si c'est un multiple ou non

<u>Prédicats :</u>

Une fonction $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ est un prédicat ssi $Image(f) = \{0,1\}$ (où on interprète '1' comme étant la valeur logique 'vrai' et '0' comme 'faux')

Ex : $ppqe(a,b) = \begin{cases} 1\ si\ a \leq b \\ 0\ sinon \end{cases}$

Def : Prédicat PR

Un prédicat est PR si f est PR

Ex : $ppqe\ (a,b) = zero(\dot{-}\ (a,b))$ -> il faut démontrer que $zero$ est PR

$$zero(x) = \begin{cases} 1\ si\ x = 0 \\ 0\ sinon \end{cases}$$

$$zero(x) = 1\ \dot{-}\ x$$

(Par schéma de PR : $\dot{-}\ (1,x) \rightarrow \dot{-}\ (\sigma\mathcal{Z}(\,), x) \rightarrow \dot{-}\left(\sigma\mathcal{Z}(\,), \prod{}_1^1(x)\right) \rightarrow \dot{-}\ (\sigma\mathcal{Z}(\ x), \prod{}_1^1(x))$)

Donc par composition le prédicat $ppqe(a,b)$ est PR

Ex 2 : $ppqe(a,b) = \begin{cases} 1\ si\ a \geq b \\ 0\ sinon \end{cases}$

$$ppqe(a,b) = zero(\dot{-}\ (b,a))$$

Ex 3 : $eg(a,b) = \begin{cases} 1\ si\ a = b \\ 0\ sinon \end{cases} = ppqe(a,b) * ppqe(a,b)$

Ex 4 : $OU(P_1, P_2) = P_1 + P_2\ \dot{-}\ (P_1 * P_2) \rightarrow$ ou logique de 2 prédicats

Ex 5 : $Non\ (P) = \begin{cases} 1\ si\ P = 0 \\ 0\ sinon \end{cases} \rightarrow$ non logique d'un prédicat

$$/\left(\underbrace{a}_{parametre}, \underbrace{b}_{constant}\right) : \left| \begin{array}{c} /(0,b) = \mathcal{Z}(\,) \\ /(a+1,b) = eg\left(b * \sigma\prod{}_3^1(/(a,b),a,b), a+1\right) + /(a,b) \end{array} \right.$$

Ex : $/(7{,}3) = \ eg(3 * \ \sigma\ /(6{,}3), 7) + \ /(6{,}3) = \ 2$

$/(6{,}3) = \ eg(3 * \ \sigma\ /(5{,}3), 6) + \ /(5{,}3) = \ 2$

$/(5{,}3) = \ eg(3 * \ \sigma\ /(4{,}3), 5) + \ /(4{,}3) = \ 1$

$/(4{,}3) = \ eg(3 * \ \sigma\ /(3{,}3), 4) + \ /(3{,}3) = \ 1$

$/(3{,}3) = \ eg(3 * \ \sigma\ /(2{,}3), 3) + \ /(2{,}3) = \ 1$

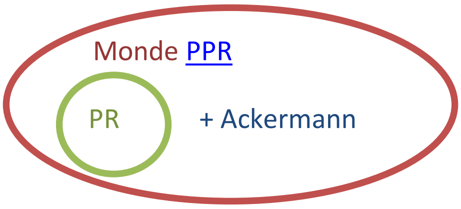
$/(2{,}3) = \ eg(3 * \ \sigma\ /(1{,}3), 2) + \ /(1{,}3) = \ 0$

$/(1{,}3) = \ eg(3 * \ \sigma\ /(0{,}3), 1) + \ /(0{,}3) = \ 0$

On veut agrandir notre classe de fonction pour ajouter au minimum la fonction Ackermann, car elle n'appartient pas au schéma de PR

$\mathbb{N} \ \cup \{\perp\}$ avec $f : \mathbb{N} \cup \{\perp\} \rightarrow \ \mathbb{N} \cup \{\perp\}$, on dira $f(\perp) = \perp$ par convention

Clairement on veut :



PPR : Partielles partiellement récursives

Def : une fonction $f \ : \ \mathbb{N} \rightarrow \ \mathbb{N}$ est partielle si $dom(f) \neq \ \mathbb{N}$

On note $\forall\ x \ \in \ \mathbb{N}, dom(f)\ , f(x) = \perp$ (ex : division par 0)

On crée un SHEMA DE MINIMALISATION

Si g est une fonction PPR d'arité n+1

Alors la fonction f ainsi définie :

$f(x_1, \dots, x_n) = \ \mu_y\ g(y, x_1, \dots, x_n)$ avec y qui peut aller à l'infini est une fonction PPR

$$\mu_y\ g(y, x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} k \ si\ g(k, x_1, \dots, x_n) = 0\ ET\ \forall h < k, \perp \neq g(h, x_1, \dots, x_n) \neq 0 \\ \perp\ sinon \end{cases}$$

Ex : $U(x) = \perp \ \ \forall\ x \ \in \ \mathbb{N}$

On cherche $g(y, x)$ tel que $U(x) = \mu_y g(y, x)$

$\mu_y g(y, x) = \perp \ \ \forall\ x \Longrightarrow \ \forall x, y\ , g(y, x) \neq 0$

$$g(y, x) = \ \sigma(x + y)$$

Ex 2 : $f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x = 0 \\ \perp \; sinon \end{cases}$ $\Longrightarrow$ Est-ce que f est PPR

schéma par cas : $f(x) = \begin{cases} \mathcal{Z}() \;\; zero(x) \\ U(x) \;\; 1 \dot{-} zero(x) \end{cases}$

En utilisant la minimalisation

$f(x) = \mu_y g(y, x)$

Pour $x = 0 \rightarrow \mu_y g(y, 0) = 0 \Longrightarrow g(0,0) = 0$

Pour $x \neq 0 \rightarrow \mu_y g(y, x) = \perp \Longrightarrow \forall y, g(y, x) > 0$

Par exemple : $g(y, x) = \prod_2^2 (y, x)$

Or c'est PPR donc on a le droit de minimaliser

Ex : $f(x) = \begin{cases} \perp \; si \; x = 0 \\ 0 \; sinon \end{cases}$ Est-ce que f est PPR

$f(x) = \mu_y g(y, x)$

Si $x = 0 \rightarrow \mu_y g(y, 0) = \perp \Longrightarrow \forall y, g(y, 0) > 0$ (avec par exemple $zero(\prod_2^2 (y, x))$)

Si $x \neq 0 \rightarrow \mu_y g(y, x) = 0 \Longrightarrow g(0, x) = 0$

PPR : Partielles partiellement récursives

PR : fonction Primitive Récursive