# Calculabilité & Complexité – cours du 27/01

On peut séparer un ordinateur en 3 parties :

- Périphérique d'entrée : clavier $\in \mathbb{N}$, souris -> (x,y,t) $\in \mathbb{N}^3$, ect …
- Unité centrale
- Périphérique de sortie : écran, imprimante, ect … -> (x,y,c) $\in \mathbb{N}^3$

Considérons qu'un calcul à l'ordi correspond à un calcul de fonction :

$$\underbrace{\mathbb{N}, \mathbb{N}^3}_{entrée\ en\ nombre\ fini} \rightarrow \underbrace{\mathbb{N}^3 * \mathbb{N}^3 * \ldots * \mathbb{N}^3}_{sortie\ en\ nombre\ fini}$$

On cherche à savoir si une fonction est calculable. Pour cela on crée un cadre formel que l'on incrémentera selon la complexité par induction.

**Fonctions Primitives Récursives (PR)**

Base : $\mathcal{Z}(\,)$renvoie toujours zéro

$\sigma : \forall\, x \in \mathbb{N},\ \sigma(x) = x + 1$ (successeur)

$\prod_n^k : \forall\, (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n, \prod_n^k (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = x_k$ (projecteur)

**Schéma de composition de fonctions**

Hyp : $\begin{cases} \text{Soit } h_1, \ldots, h_k \text{ des fonctions PR d'arité } n \\ \text{Soit } g \text{ une fonction PR d'arité } k \end{cases}$

Alors la fonction $f$ d'arité $n$ ainsi définie :

$\forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n, f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n))$ est aussi PR

Ainsi, de par ce schéma, on peut dire que :

- Les fonctions constantes sont PR :
  $\forall x \in \mathbb{N}, 5(x) = 5 \Longrightarrow \mathcal{Z}(\,)\underbrace{\circ\ \sigma\ \circ \ldots \circ\ \sigma}_{5\ fois}$
- La fonction identité est PR :
  $\forall\, x \in \mathbb{N}, \prod_1^1 (x) = x$

**Schéma de récursion primitive**

Hyp : $\begin{cases} \text{Soit } g \text{ une fonction d'arité } n \text{ PR} \\ \text{Soit } h \text{ une fonction d'arité } n+2 \text{ PR} \end{cases}$

Alors la fonction $f$ d'arité $n + 1$ ainsi définie :

$f(0, x_1, \dots, x_n) = \ g(x_1, \dots, x_n)$

$f(m + 1, x_1, \dots, x_n) = h(f(m, x_1, \dots, x_n), m, x_1, \dots, x_n)$ est PR

Simplification (incorrecte) pour comprendre :

$$f(m, \cancel{x_1, \dots, x_n}) = h\big(f(m-1)\big) = h\Big(h\big(f(m-2)\big)\Big) = h^m\big(f(0)\big) = h^m(g)$$

Mais dans un cas de td, il ne faut supprimer aucun argument (cf td pour meilleur compréhension)

Arité : nombre d'argument que requiert la fonction

PR : Primitive Récursive