Dm d'analyse:

Feuille 2

Exercice 3 : Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable ad hoc :

1. $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\, dt$

   On pose $x = \cos t$

   Ainsi $dx = -\sin t\, dt$

   Si t = 0, $x = 1$ et si t = π, $x = -1$

   Par changement de variable on obtient :

   $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\, dt = \int_1^{-1} \frac{-dx}{3+x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{3+x^2}$

   On a donc la fonction $f(x)$ tel que :

   $f(x) = \frac{1}{3+x^2} = \frac{1}{3(1+\frac{x^2}{3})} = \frac{1}{3} * \frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{3}})^2}$

   Donc :

   $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3+x^2} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}$

   $= \frac{1}{3}[\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)]_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ (\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)) = \frac{1}{\sqrt{3}}\ (2\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3})$

2. $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\, dt$

   On pose $x = \ln t$

   Ainsi $dx = -\frac{dt}{t^2}$

   On peut donc dire :

   $\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(x+1) dx$

   $= [(x+1)\ln(x+1) - (x+1)]_{\frac{1}{2}}^{1} = 2\ln 2 - 2 - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} = 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 7/2$

3. $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}+2t}$

   On pose $t = x^2$, donc $x = \sqrt{t}$

   Ainsi $dt = 2xdx$

   $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}+2t} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2xdx}{x+2x^2} = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{1+2x}$

   $= [\ln(1+2x)]_1^{\sqrt{2}} = \ln(1+2\sqrt{2}) - \ln 3$

4. $\int_1^3 x\sqrt{x-1}\ dx$

On déclare $t = \sqrt{x-1}$

D'où $dx = 2tdt$

Si $x = 1, t = 0$, et si $x = 3, t = \sqrt{2}$

On a donc :

$\int_1^3 x\sqrt{x-1}\ dx = 2\int_0^{\sqrt{2}}(t^2+1)t^2\,dt = 2\int_0^{\sqrt{2}}(t^4 + t^2)dt$

$= 2[\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}]_0^{\sqrt{2}} = 2\left(\frac{2^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}\right) = 2 * 2^{\frac{3}{2}}\,(\frac{2}{5} + \frac{1}{3})$

5. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

On pose $t = \sqrt{x}$

Alors $2tdt = dx$

On peut donc dire :

$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^2\left(1 - \frac{1}{1+t}dt\right)$

$= 2\,[t - \ln(1+t)]_0^2 = 2(2-\ln 3)$

6. $\int_0^4 \frac{dx}{1+e^x}$

On pose $t = e^x$

On peut donc dire $dt = e^x dx$

$dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

Or si $x = 0, t = 1$ et si $x = 4, t = e^4$

$\int_0^4 \frac{dx}{1+e^x} = \int_1^{e^4} \frac{dt}{t(1+t)} = \int_1^{e^4}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int_1^{e^4} \frac{1}{x}dx - \int_1^{e^4} \frac{1}{x+1}$

$= [\ln|x|]_1^{e^4} - [\ln|x+1|]_1^{e^4}$

Pour $x \in [1, e^4]$ on a $x > 0$

Donc $\ln|x| = \ln x$ et $\ln|x+1| = \ln x + 1$

Pour conclure :

$\int_0^4 \frac{dx}{1+e^x} = [\ln|x|]_1^{e^4} - [\ln|x+1|]_1^{e^4} = \ln e^4 - \ln 1 - (\ln(e^4+1) - \ln(1+1))$

$= \ln e^4 - \ln(e^4+1) + \ln 2 = 4 - \ln(e^4+1) + \ln 2$