Série de fonctions (suite)

Th d'intervention

a. Th (intervention " $\lim\ et\ \Sigma$")

- Soit $\sum f_n$ une série de fonction convergeant uniformément sur I (intervalle qlq de $\mathbb{R}$)
- Soit a $\in$ $\mathbb{R}$ tel que :
  - a $\in I$
  - a est une extrémité de I, convergent vers $+\infty$
- f_n convergente, on a, $\forall\ n \geq 0 : \lim_{x\to a} f_n(x)\ \exists$

Alors la série numérique $\sum \lim_{x\to a} f_n(x)$ converge et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x))$

b. Continuité (corollaire de (a))

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions

- On suppose que f_n est continue sur I, $\forall\ n, \forall a\ \in I, \lim_{x\to a} f_n(x)\ \exists = f_n(a)$
- $\sum f_n$ converge uniformément sur I

Alors la somme S(x) de la série $\sum f_n$ est une fonction continue sur I ($\sum f_n\ (a)$ converge et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(a) = \lim_{x\to a} s(x)$)

Ex : Soit $\sum f_n$

$f_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}, \forall\ n \geq 0, f_n$ continue sur $[0,1]$

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{matrix} Soit\ x\ \in [0,1] fixé\ et \to 0 \\ |f_n(x)| = \dfrac{x^n}{2n+1} \end{matrix}\right\} \sum f_n\ converge\ simplement\ sur\ [0,1]$$

Pour montrer la convergence uniforme de $\sum f_n$ il suffit de montrer que $||R_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$|R_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)|$ avec f_k série alternée

$$0 \leq \sup_{t\in[0,1]} |R_n(t)| \leq \frac{1}{2n+3}$$

$$|f_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$$

$\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I

$\sum ||f_n||_\infty$ diverge

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

- ➔ $\sum \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)|$ diverge
- ➔ $\sum \frac{1}{2n+1}$ diverge et $\frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2} * \frac{1}{n}$

c. Dérivation (terme à terme)

Soit $\sum f_n$ une série de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I

- Supposons que $\sum f_n$ converge simplement sur I
- supposons que $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I ([a,b], a < b, a,b ∈ $\mathbb{R}$)

Alors la somme S de la série est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et
$S'_{x \in I}(x) = (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x))' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$

d. Intégration (terme à terme)

Soit [a,b] un segment de $\mathbb{R}$

Th : Soit $\sum f_n$ une série de fonction

- Supposons que f_n soit continue sur [a,b] $\forall n$
- $\sum f_n$ converge uniformément sur [a,b]

Alors la somme S de cette série vérifie :

$\int_a^b S(t)dt = \int_a^b (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t))dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt\right)$ converge