Série de fonctions

I. Définition

On appelle série de fonction de terme général f_n la suite de fonction (S_n) avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$

S_n est appelé somme partielle de rang n de la série de fonction

Ex : $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f_n(t) = t^n$

Etudions la « série de fonction $\sum f_n$ » ⇔Etudions la suite de fonction (S_n)

$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$

$$S_n(t)^n = \sum_{k=0}^{n} f_n\,(\mathrm{t}) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{t}_k = \begin{cases} \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t}\ si\ t \neq 1 \\ n+1\ si\ t = 1 \end{cases}$$

II. Convergence simple

Def :

a. On dit que la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement en t ($\in I$) lorsque la suite (S_n) de ses sommes partielles converge simplement en t. ⇔ la suite $(S_n(t))_n$converge, on note S(t) sa limite

b. On dit que la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur I ssi elle converge simplement en tout point de I. On note S la limite de la suite (S_n), S(t) = $\lim_{n\rightarrow+\infty} S_n(t), \forall t \in I$, S = $\sum_{n=0}^{=\infty} f_n$

$$S(t) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(\mathrm{t})\,, \forall\ t \in I$$

Def : si $\sum f_n$ converge simplement sur I alors on introduit son reste de rang n

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$$

$$R_n : I \rightarrow \mathbb{R}(ou\ \mathbb{C})$$

$t \rightarrow R_n(t) = (\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k)(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)$

Remarque : $\sum f_n$ converge simplement sur I → R_n converge simplement sur I vers la fonction identiquement nulle

Ex : $f_n(t) = t^n$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t) = \begin{cases} \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t} \; si\; t \neq 1 \\ n+1 \; si \; t = 1 \end{cases}$$

Quels sont les t ∈ ℝ pour lesquels $(S_n(t))$ converge ? (⇔cherche l'ensemble de def de S)

Si t ∈ $]-1,1[, \lim_{n\to+\infty} t^n = 0$

t = -1, $t^n = (-1)^n$ diverge

t = 1, $S_n(t) = n+1$ diverge vers +∞

si t > 1, $(t^n)_n$ diverge vers +∞

si t < -1, $(t^n)_n$ diverge

$D_s =]-1,1[\,, S(t) = \frac{1}{1-t}$

$\sum f_n$ converge simplement sur]-1,1[vers S

III. Convergence uniforme

Def : On dit que la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur I lorsque la suite (S_n) de ses sommes partielles converge uniformément sur I

Th : $\sum f_n$ converge uniformément sur I ssi

$\sum f_n$ converge simplement sur I et $\|R_n\|_\infty \to 0$

$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)\,, \forall\, t \in I, \lim_{n\to+\infty} R_n(t) = 0$

$\|R_n\|_\infty = sup_{t\in I}|R_n(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ex : $g_n(t) = t^n, t \in]-1,1[$

$\forall\, t \in]-1,1[,\ \lim_{n\to+\infty} g_n(t) = 0$

$\|g_n\|_\infty = \sup|g_n(t)| = \sup|t|^n = \sup t^n = 1$

Cas de convergence simple, sans convergence uniforme sur]-1,1[

Soit 0 < a < 1

Montrer que g_n converge uniformément vers « la fonction nulle » sur [0,a]

$$\sup_{t\in[0,a]}|g_n(t)| = \sup_{t\in[0,a]} t^n = a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(g_n) converge uniformément vers la « fonction nulle » sur [0,a] mais ne converge pas uniformément vers la « fonction nulle » sur [0,1] pour a quelconque

IV. Convergence normale

Def : On dit que la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur I lorsque :

- les fonctions f_n sont bornées sur I : $\|f_n\|_\infty = \sup_{t\in I}|f_n(t)| \in \mathbb{R}^+, \forall n$
- la série numérique $\sum\|f_n\|_\infty$ converge (à termes positifs)

th : Si la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur I, alors cette série converge uniformément sur I

démo : on a la série numérique $\sum\|f_n\|_\infty$ qui converge

$\forall\, t_0 \in I, |f_n(t)| \leq \sup|f_n(t)| = \|f_n\|_\infty, \forall\, n$

Donc $\sum|f_n(t_0)|$ converge

$\Leftrightarrow \sum f_n(t_0)$ converge $\Rightarrow 2f_n(t_0)$ converge, $\forall\, t_0 \in I$

$\Leftrightarrow$ la série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur I (S sa somme, définie sur I)

- $|R_n(t_0)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t_0)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}|f_k(t_0)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left||f_k|\right|_\infty$

$|f_k| <) \left||f_k|\right|_\infty = \sup_{t\in I}|f_k(t)|$

$\left||R_n|\right|_\infty = \sup|R_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}||f_k||$

$\Rightarrow \lim\left||R_n|\right|_\infty \exists = 0, \sum f_n$ converge uniformément sur I

<u>Ex :</u> $f_n(t) = \frac{1}{n^2+t^2}, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$

Etude de $\sum f_n$

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{n}$	$\searrow$	0

$$f_n'(t) = \frac{-2t}{(n^2+t^2)^2}$$

$\|f_n\|_\infty = \sup f_n(t) = \frac{1}{n^2}$, f_n bornée sur $\mathbb{R}$

$\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, ⇒ la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$

Remarque : CN sur I ⇒ CU sur I ⇒ CS sur tous les points de I, et les 2 réciproques sont fausses