Analyse

Suite de Fonctions

I = un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$

I. Définitions et différents type de convergence

Def : On appelle suite de fonction de I dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$) toute suite $(f_n)_{n\in N}$ d'element $\mathcal{F}(I, R)$ (ou $\mathbb{C}$)

Ex : $\forall n \geq 1$, f_n: [0, 1] -> $\mathbb{R}$, f_n (t) = t^n

(f_n) est une suite de fonction de [0,1] vers $\mathbb{R}$

1. Convergence simple

Def : On dit que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction f : I -> $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) lorsque :

$\forall\, t \in I, (f_n(\mathrm{t}))_{n\geq 0}$ est une suite numérique convergente et qui converge vers f(t)

La fonction f est alors unique, on l'appelle limite simple de la suite (f_n) et on note f = $\lim_{n\to+\infty} f_n$

Propriété : Si la suite (f_n) converge simplement sur I, vers f,

Alors : $\forall\, J \subset I$, (f_n) converge simplement sur J, vers f

Ex : $\forall\, t \in [0,1[$, f_n (t) = t^n $(t^n)_{n\geq 1}$ c onverge vers 0

Si t = 1 $f_n(1)$ = 1, $\forall\, n\ (f_n(1))_{n\geq 1}$ converge vers 1

$$\begin{cases} f : [0,1] \to \mathbb{R} \\ f(t) = 0 \ \ si\ t \in [0,1[\\ f(1) = 1 \end{cases}$$ f n'est pas continue sur [0,1]

La suite f_n converge vers la fonction f

$\lim_{\substack{t<1 \\ t\to 1}} f(t) = 0 \neq 1 = f(1)$

f_n : I -> $\mathbb{R}$, f : I -> $\mathbb{R}$

Propriété : Supposons que la suite f_n converge simplement vers la fonction f sur I

a. Si $\forall\, n$, f_n est une fonction positive sur I, alors f est aussi une fonction positive sur I
b. Si $\forall\, n$, f_n est une fonction croissante sur I, alors f est aussi croissante sur I

Démo b.

Soit $t \leq t'$, t et $t' \in I$ $\quad f(t) \leq f(t')$?

$\forall\, n, f_n\,(t) \leq\; f_n(t^{'})$ car f_n est une fonction croissante

Ce qui veut dont dire que $f(t) \leq f(t')$ c'est-à-dire que f est croissante

Ex : $f_n(t) = \; t^n$ sur [0,1]

f_n converge simplement vers f sur [0,1]

Remarque : les f_n sont des fonctions continues

⚠ f n'est pas continue sur [0,1] !

2. Convergence uniforme

Soit f_n une suite de fonction de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

Def : On dit que la suite f_n converge uniformément vers f : I -> $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) sur I lorsque :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N\; \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq N, \forall\, t\; \in I,\; |f_n(t) - \; f(t)| \leq\; \varepsilon$$

Remarque :

- Converge simplement sur I :

$\forall\, t\; \in I, (f_n(t))_n$ converge vers $f(t)$

$\forall\, t\; \in I, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N_{\varepsilon,t} \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq N, \forall\, t\; \in I,\; |f_n(t) - \; f(t)| \leq\; \varepsilon$

- Converge uniformément

Converge uniformément sur I $\Rightarrow$ Converge simplement sur I

⚠ La réciproque est fausse !

Propriété : si f_n converge uniformément sur I vers f

$\forall\, J\; \subset I\; \Rightarrow\; f_n$ converge uniformément sur J vers f

Propriété : On a équivalence entre les 2 propriétés suivantes :

i. La suite f converge uniformément sur I vers f
ii. Pour n assez grand, la fonction $f_n - \; f$ est bornée et $\mathrm{Sup}_{t\,\in I}\, |f_n(t) - f(t)| = ||\, f_n - f||_I \xrightarrow[n \to\; +\infty]{} 0$

f_n converge uniformément sur I vers f :

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq N, \forall\, t\; \in I, |f_n(t) - \; f(t)| \leq\; \varepsilon,\; \mathrm{Sup}_{t\,\in I}\left|f_n(t) - f(t)\right| \leq\; \varepsilon$

Ex : f_n : ℝ -> ℝ, $f_n(t) = \frac{t+n}{n(1+t')}$, $n \geq 1$

a. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé

$$f_n(t) = \frac{n(\frac{t}{n}+1)}{n(t+t^2)} + \frac{1+\frac{1}{n}}{1+t^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1+t^2} = f(t), \forall\, t \in \mathbb{R}$$

f_n converge simplement sur ℝ vers f

b. $| f_n(t) - f(t)| = \left|\frac{t+n}{n-1+t^2)} - \frac{1}{1+t^2}\right| = \left|\frac{1}{n(1+t^2)}\right| = \frac{1}{n} * \left|\frac{t}{1+t^2}\right|$

$\text{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \left|f_n(t) - f(t)\right|$ = $\text{Sup}_{t\in I} \frac{1}{n} * \frac{|t|}{1+t^2}$ = $\frac{1}{n} *$ $\text{Sup}_{t\in I} \frac{|t|}{1+t^2}$

$||f_n - f||_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ f_n converge uniformément sur ℝ vers f

$\varphi(t) = \frac{t}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}^+$

	0	1	$+\infty$
φ'	+	0	-
φ	0 $\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$ 0

$$\varphi'(t) = \frac{1+t^2-2t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$$

$\text{Sup}_{t\in I}\, \varphi(t) = \frac{1}{2}$

3. Convergence uniforme sur tout segment

Def : f_n fonction sur I dans ℝ (ou ℂ)

f fonction sur I dans ℝ (ou ℂ)

On dit que f_n converge uniformément sur tout segment de I vers f si

$\forall\, [a,b] \subset I, f_n$ converge uniformément sur [a, b] vers f

II. Théorème d'interversion

Soit $a \in I$ ou a une des extrémités éventuellement infinie de I

Théorème : si f_n converge uniformément sur I vers f et si chaque $f_n(t)$ admet une limite lorsque $t \to a$, alors :

- La suite $(\lim_{t\to a} f_n\,(\mathrm{t}))_n$ converge
- $f(t)$ admet une limite lorsque $t \to a$
- $\lim_{n\to+\infty}(\lim_{t\to a} f_n\,(\mathrm{t})) = \lim_{t\to a}(\lim_{n\to+\infty} f_n\,(\mathrm{t})) = \lim_{t\to a} f(t)$

1. Continuité

Théorème : si f_n converge uniformément sur I vers f et si chaque f_n est continue en $a \in I$, alors f est aussi continue en a

Théorème : Si f_n converge uniformément sur I vers f et si chaque f_n est continue sur I, alors f est continu sur I

2. Intégration

Soit f_n une suite de fonction sur [a, b] dans $\mathbb{R}$

Si f_n converge uniformément vers f sur [a, b] alors

- La suite $\int_a^b f_n\,(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ converge
- $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n\,(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} (\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} f_n\,(\mathrm{t}))\mathrm{dt} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(t)dt$

Ex : f_n : [0,1] -> $\mathbb{R}$, $f_n(t) = n^2 t^n (1-t)$

Si t ∈ $[0,1[\ \ \lim_{n\to+\infty} f_n\,(\mathrm{t}) = 0$

Si t = 1 $f_n\,(1) = 0,\ \lim_{n\to+\infty} f_n\,(1) = 0$

f_n converge simplement vers f sur [0,1]

Soit $f\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$ et $t \to 0$

Fonction identiquement nulle sur [0,1]

$\forall n\ \int_0^1 f_n\,(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \mathrm{n^2} \int_0^1 \mathrm{t^n}(1-\mathrm{t})\mathrm{dt} = \mathrm{n^2} \int_0^1 \mathrm{t^n}\mathrm{dt} - \mathrm{n^2}\int_0^1 \mathrm{t^{n+1}}\mathrm{dt} = \frac{\mathrm{n^2}}{(\mathrm{n}+1)(1+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$\int_0^1 f(t)dt = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n\,(\mathrm{t})\mathrm{dt} \neq \int_0^1 f(t)dt$$

3. Dérivation

Théorème : Soit f_n une suite de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I vers $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

f_n continue, dérivable et f_n' continue sur I

Si la suite f_n converge simplement sur I vers f

Et si la suite f_n' converge uniformément sur tout segment de I

Alors :

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I
- $(\lim_{n\to+\infty} f_n)' = f' = \lim_{n\to+\infty} f_n'$
- De plus, la suite f_n converge uniformément vers f sur tout segment de I