Séries numériques

I. Vocabulaire et 1ere propriétés

Def : Soit $(\mathrm{Un})_{n\geq 0}$ une suite numérique. On appelle série de terme général Un la suite $(Sn)_{u\geq 0}$ avec Sn = $\sum_{k=0}^{n} U_k$ (somme partielle de rang n). Cette série est notée « $\sum_{n\geq 0} Un$ » ou « $\sum Un$ »

Ex : Un = n, n>= 0 $\quad \sum_{k=0}^{n} Uk = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = Sn$

Ex : Un = $\frac{1}{n}$, $n \geq 1$

Ex : une suite$(Vn)_{n\geq 0}$, une suite $(Un)_{n\geq 0}$ avec Un = Vn – V (n-1), n>=1, $U_0 = U_0$

$\sum Un : \ Sn = \sum_{k=0}^{n} Un = U_0 + U_1 + \ldots + U_n = U_0 + (V_1 - V_0) + \ldots + (V_n - V_{n-1})$

Def : On dit qu'une série $\sum Un$ converge ssi la suite $(Sn)_{n\geq 0}$ de ses sommes partielles converge

On pose alors $\sum_{n=0}^{+\infty} Un$: sa limite « somme de la série »

Ex : $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ Un = $\frac{1}{n(n-1)}$, $\quad$ Sn = $\sum_{k=2}^{n} U_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$

$\frac{1}{k(k-1)} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}$ $\quad$ = $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Prop : Si $\sum_{n\geq 0} Un$ est une série convergente alors la suite $(Un)_{n\geq 0}$ converge vers 0

La réciproque est fausse

Def : Si $\sum_{n\geq 0} Un$ converge, alors on introduit $Rn = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k$ le reste de rang n de la série

Remarque : m >= n $\sum_{k=0}^{m} U_k = \sum_{k=0}^{n} U_k + \sum_{k=n+1}^{m} U_k$

Opérations :

Th : Si$\sum Un \ et \ \sum Vn$ converge alors ∀ $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- $\sum(Un + Vn)$ $converge\ et$ $\sum_{n=0}^{+\infty}(Un + Vn) = \sum_{n=0}^{+\infty} Un + \sum_{n=0}^{+\infty} Vn$
- $\sum \lambda Un$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda Un) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} Un$

Th : Soit (Un) et (Vn) 2 suites réelles tq Un <= Vn, ∀ $n \geq 0$

Si $\sum Un \ et \ \sum Vn$ converge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} Un$ <= $\sum_{n=0}^{+\infty} Vn$

II. Absolue convergence

Def : On dit qu'une série $\sum Un$ et absolument converge (acv) ssi $\sum |Un|$ converge

Ex : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$

$\frac{1}{n^2}$ <= $\frac{1}{n(n-1)}$, n>= 2

Th : Soit $\sum Un$ et $\sum Vn$ 2 séries à termes positifs vérifiant Un <= Vn, $\forall\, n \geq 0$

a. Si $\sum Vn$ converge alors $\sum Un$ converge
b. Si $\sum Un$ diverge alors $\sum Vn$ diverge

Th : Si $\sum Un$ est acv, alors $\sum Un$ converge et $|\sum_{n=0}^{+\infty} Un| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |Un|$ (démo par critère de Cauchy)

Th : Soit (Un), (Vn) 2 suites

a. Si Un = O(Vn) et si $\sum Vn$ acv alors $\sum Un$ acv
b. Si Un = o(Vn) et ________________________
c. Si Un $\underset{+0}{\sim}$ Vn alors $\sum Un$ est acv ssi $\sum Vn$ est acv

Demo :

a. $\exists\, M \in \mathbb{R}^+, \exists\, N \in \mathbb{N}$, tq |Un| <= M|Vn|, $\forall n \geq N$
b. $\frac{Un}{Vn} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ $\quad \forall\, \varepsilon > 9, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \left|\frac{Un}{Vn}\right| \leq \varepsilon$ donc |Un| <= $\varepsilon|Vn|$
c. $\frac{Un}{Vn} \xrightarrow{n \to +\infty} 1$ $\quad$ ____________________________$1 + \varepsilon$ donc |Un| <= $(1+\varepsilon)|Vn|$

Série de Riemann

Th : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

a. Si $\alpha \leq 1, \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ $diverge$
b. Si $\alpha \geq 1$ ________ converge (absolument)

Ex : $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+n+1}$

$\frac{1}{n^2+n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim}$ 1/n²

Donc si le premier converge, le second converge

Ex : $\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{n^2+1}$

Un = $\frac{n+1}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} 1/n$

$\sum_{n\geq 1} 1/n$ diverge -> $\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{n^2+1}$ diverge

Séries géométrique

Th : Q ∈ $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$)

a. Si |q| >= 1 alors $\sum_{n\geq 0} q^n$ divergente
b. Si |q|< 1 _______________ absolument convergente

Règle de d'Alembert

Th : Soit $\sum Un$ une série

Si $|\frac{U(n+1)}{Un}| \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in R^{+} \cap \{+\infty\}$, alors :

a. Si l > 1, alors $\sum Un$ diverge
b. Si l < 1, alors $\sum Un$ acv

Série alternée

Def : une série $\sum Un$ est dite alternée ssi la suite (Un) est alternée

La suite (Un) est alternée ssi

- $\forall n \in N$, Un = $(-1)^n$|Un|
  Ou
- $\forall n \in N$, Un = $(-1)^{n-1}$|Un|

Th (Critère de Leibniz)

Soit $\sum Un$ une série alternée

Si la suite $(|\text{Un}|)_{n\geq 0}$ est décroissante et converge vers 0

Alors la série $\sum Un$ converge

De plus, Rn = $\sum_{k=n+1}^{+\infty} Un$ vérifie : Rn et U(n+1) sont de même signe et |Rn| <= |U(n+1)|

Ex : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

Série alternée convergente (mais pas absolument)

Lien entre série et intégrale

Th : Soit $n_0 \in n\mathbb{N}$ et f : [$n_{0,}$ $+\infty$[-> R^+ continue par morceaux décroissante et positive

La série de terme général Wn = $\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$ est convergente

Corollaire : $\sum_{n\geq\, n_0} f(n)$ et $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature

Demo :

f(n) <= $\int_{n-1}^{n} f(t)dt \leq f(n-1)$

0 <= Un <= f(n-1) – f(n)

La nature de la série $\sum(f(n-1) - f(n))$

Propriétés : série de Bertrand

$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ série convergente ssi soit $\alpha < 1$ eou $\alpha = 1$ $et\ beta > 1$

Acv = absolument convergente

Retour en haut de page

Retour au site de cours