Analyse

I. Suite numérique

Definition :

On appelle suite numérique réelle (def complexe) tout application u : N -> R

$\forall n \in N$, u(n) = u_n (le terme d'indice n de la suite) « la suite $(Un)_{n\in N}$ «

Definition :

a) Une suite (U_n) est dite constante à partir d'un certain rang ou stationnaire s'il existe C ∈ ℂ (ou ℝ) et N ∈ ℕ tq ∀ n>= N, U_n = C
b) Une suite réelle (U_n) est dite majorée s'il existe M ∈ ℝ tq $\forall n \in$ ℕ, U_n <= M
c) ________________________minorée________m_______________m <= U_n
d) ________________________bornée ssi elle est majorée et minorée

Propriété : Une suite réelle (U_n) est bornée ssi il existe M ∈ $ℝ^+$ tq |U_n| <= M $\forall n \in$ ℕ

Def : Une suite complexe (Un) est dite bornée si il existe M ∈ $ℝ^+$ tq |U_n| <= M $\forall n \in$ ℕ

Ex : $\Omega \leq Un \leq 3, \forall n \in$ ℕ

|Un| <= 3, ∀ n ∈ ℕ (↔ -3 <= Un <= 3)

Définition : Soit (Un) et (Vn) 2 suites numériques et $\lambda \in C$, on note $\lambda u = (\lambda * Un)_{n \in N}$

Def :

a) On appelle suite arithmétique de raison r $ℂC$, toute suite u = (Un) tq ∀ n ∈ ℕ N, Un+1 = Un + r. Alors Un = U_0 + n*r, ∀ n ∈ ℕ
b) On appelle suite générique de raison q ∈ ℂ, toutes suite u tq ∀n ∈ ℕ, Un+1 = q * Un. Alors Un = $U_0 * q^n$, ∀ n ∈ ℕ

II. Limites

1. Convergence :

Def : Soit (Un) une suite numérique et l ∈ ℂ. On dit que (Un) tend vers l si $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N_\varepsilon\ \in \mathbb{N}\ tq\ \forall\ n \geq\ N_{\varepsilon\ ,|Un-l| \leq\ \varepsilon}$

On note « Un -> l »

(Un) converge vers l = $\lim_{n \to +\infty} Un$

Prop : lorsque la limite existe, elle est unique

Théo : Soit (Un) une suite tq il existe N ∈ ℕ, $\forall\ n \geq N$, |Un – l| <= Vn

(Vn) suite -> 0

Alors (Un) -> l

Theo : toute suite convergente est bornée

La réciproque est fausse

Ex : $\left.\begin{array}{l} Un\ = \sin n \\ \mathrm{Un}\ =\ (-1)^{\mathrm{n}} \end{array}\right\}$ bornées, pour le 2° Un = 1, U_{2n+1} = -1

Ex : Un = $n(-1)^n$ Un= ln, U^{n+1} = -(2n +1)

Ex : Un = $\frac{\sin n}{3-\cos n}$ |Un| = $\frac{|\sin n|}{|3-\cos n|}$

|sin n| <= 1 et |3 – cos n| >= ? Donc non min et non maj

Ex : Un = 1/n n ∈ N^* « Un $\overrightarrow{n \to +\infty}$ 0 »

$\forall \varepsilon > 0, \exists\ N_\varepsilon\ = E(\frac{1}{\varepsilon})$ (partie entiere) ∈ ℕ

$\forall\ n \geq\ N_\varepsilon$, 1/n <= ε

$1/N_\varepsilon \leq\ \varepsilon$

$N_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$

2. Divergence infinie pour les suites réelles

Def : Soit (Un) une suite réelle. On dit que (Un) tend vers +On dit que (Un) tend vers +∞ si $\forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, N_n \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq N, Un \geq M$

Soit (Un) une suite réelle. On dit que (Un) tend vers +On dit que (Un) tend vers -∞ si $\forall\, m \in \mathbb{R}, \exists\, N_n \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq N, Un \leq m$

Theo : (Somme)

1) Soit u, v 2 suites numériques. Si Un -> l et Vn -> l', alors Un + Vn -> l + l'
2) Soit u ; v 2 suites réelles.
   a. Si Un -> l et Vn -> +∞ , alors Un + Vn -> + ∞
   b. SSi Un -> l et Vn -> - ∞, alors Un + V, -> - ∞
   c. Si Un et Vn -> + ∞, alors Un + Vn -> +∞
   d. Si Un et Vn -> +∞, alors Un + Vn -> -∞

Theo : (produit)

1) Soit u,v 2 suites numériques. Si Un -> l et Vn -> l', alors Un*Vn = l*l'
2) Soit u, v 2 suites réelles
   a. Si Un -> l >0 et si Vn -> $\pm\infty$, alors Un* Vn = $\pm\infty$
   b. Si Un -> +∞ et Vn -> $\pm\infty$, alors Un*Vn -> $\pm\infty$

Theo :

1) Soit u une suite numérique. Si Un -> l $\neq 0$, alors 1/ Un -> 1/l
2) Soit Un -> 0^+, alors 1/Un -> +∞
3) Soit Un -> $\pm\infty$, alors 1/Un -> $O^{\pm}$

Theo : Soit f : D -> $\mathbb{R}$ (D $\subset$ $\mathbb{R}$) une fonction continue et soit u une suite réelle

Supposons qu'il existe un rang N ∈ $\mathbb{N}$, à partir duquel Un ∈ D, n >= N, et supposons Un -> l

Alors f(Un) converge et $\lim_{n\to+\infty} f(Un) = f(l)$

III. Etudier la limite d'une suite

1. Limite et inégalité

Theo : Soit u et v 2 suites réelles convergentes et vérifiant Un <= Vn à partir d'un certain rang

Alors $\lim_{n\to+\infty} Un \leq \lim_{n\to>+\infty} Vn$

Ex : 1/n - 1/n² < 1/n , $\forall\, n \geq 1$ à la limite on a 0 = 0

Theo : Soit u, v , w 3 suites réelles telles que Un <= Vn <= Wn à partir d'un certain rang et (Un), (Wn) converge vers la même limite l.

Alors (Vn) converge l.

Prop : Si (Un) est une suite réelle converge versl, l> a, alors il existe N ∈ ℕ tq $\forall\, n \geq N, Un > a$

Ex : Un(2 + sin n)$^{1/n}$

-1 <= sin n <= 1

1 <= 2 + sin n <= 3

1 <= Un < $3^{1/n}$

$3^{1/n} = e^{\frac{1}{n}ln3}$ -> 1

Donc (Un) converge vers 1

Theo : Soit u et v 2 suites réelles vérifiant Un <= Vn à partir d'un certain rang

1) Si Un -> + ∞ alors Vn -> + ∞
2) Si Vn -> - ∞ alors Un -> - ∞

2. Convergence monotone

Theo :

- toute suite réelle croissante (Un) admet une limite finie ou non qui est égale à la borne supérieur : sup $Un, n \in \mathbb{N}$
- _______________decroissante(Un) ____ inférieure : inf Un n∈ ℕ

3. Suites adjacentes

Def : Soit 2 suites réelles (a_n) et (B_n). On dit qu'elles sont adjacentes ssi

- (a_n) croissante
- (b_n) décroissante
- ($b_n - a_n$) converge vers 0

Théo : Soit (a_n) et (b_n) 2 suites adjacentes alors elles convergent vers la même limite l.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n <= l <= b_n$

4. Critère de Cauchy

Def : On dit qu'une suite (Un) satisfait le critère de Cauchy si

$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \exists m, n \geq N, |Um - Un| \leq \varepsilon$ <-> $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \geq 0, |Un + p - Un| \leq \varepsilon$

Theo : Une suite réelle ou complexe est convergente ssi elle suit une suite de Cauchy

Demo :

(Un) converge vers l : $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \begin{cases} |Un - l| \leq \varepsilon \\ \forall n \geq N \end{cases}$

n>= N |Un – l| <= ε

m>= N |Un – l| <= ε

|Um – Un| = |Um –l – (Un – l)| <= |Un – l| + |Un – l| <= 2 ε

Retour en haut de page

Retour au site de cours