Analyse

Sommaire :

II Intégrabilité

2/. Etude d'intégrales

- Préciser la fonction à étudier, sa continuité par morceaux sur ?
- Problème sur [0, +∞[
  - Comparer $f(x)$ à x^{α} lorsque $x \to +\infty$ avec un $\alpha \in \mathbb{R}$ bien choisi
  - Si $f(x) \sim \frac{c}{x^{\alpha}}$ $x \to +\infty$ avec un $\alpha > 1$

    $\Longrightarrow$ f est intégrable au voisinage de +∞ $\Rightarrow$ $\int_{\alpha}^{+\infty} f(t)dt$ converge

  - Si $f(x)\alpha\, x^{\alpha}$ $\xrightarrow{x \to +\infty}$ 0 avec un $\alpha > 1$

    $f(x) = \sigma(\frac{1}{x^{\alpha}})$

    $\Longrightarrow$f est intégrable au voisinage de $+\infty$ $\Rightarrow$ $\int_{\alpha}^{+\infty} f(t)dt$ converge

- problème sur]0, a]
  - Si f admet une limite finie l en 0^+, alors on la prolonge par continuité en 0, en posant $f(0) = l \Rightarrow f$ continue par morceau sur [0,a]

    $\Rightarrow$ f intégrable et $\int_0^a f(t)dt$ converge
  - Si $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{c}{x^{\alpha}}$ avec un $\alpha > 1$

    $\Rightarrow f\ intégrable\ au\ vois$ (0^+)

    $\Rightarrow \int_0^a f(t)dt$ converge
  - Si $f(x)\ \alpha\ x^{\alpha}$ $\xrightarrow{x \to 0^+}$ 0 avec $\alpha < 1$

    $\Rightarrow f$ est intégrable en 0^+

    $\Rightarrow \int_0^a f(t)dt$ converge

Ex : Nature de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

$f(t) = e^{-t^2}, f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), f \geq 0$

f continue par morceaux sur [0, +∞[

le seul problème éventuel est en + ∞

$t2 * e^{-t^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

$e^{-t^2} = o(\frac{1}{t^2})$ en +∞

$\Rightarrow f$ est intégrable en +∞

$\Rightarrow$ f est intégrable sur [0, +∞[

$\Leftrightarrow$ $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge avec $f \geq 0$

Ex : Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t+1} dt$,

$f(t) = \frac{ln\, t}{t+1}$, fonction continue par morceaux sur [1, +∞[, fonction ≥ 0

$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{ln\, t}{t}, \frac{ln\, t}{t} * t \xrightarrow[t \to +\infty]{} + \infty$

$f(t)\, \alpha\, t \xrightarrow[t \to +\infty]{} + \infty\ \alpha \leq 1$

pour t suffisamment grand

$\exists\, A \in \frac{\mathbb{R}}{\forall t} \geq A \rightarrow f(t) * t \geq 1$

Donc $f(t) \geq \frac{1}{t}$

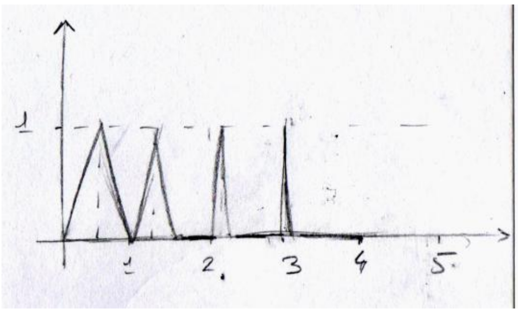
$\frac{1}{t}$ non intégrable en $+ \infty$

$\Longrightarrow f$ non intégrable en $+ \infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge

Remarques : en $+ \infty$

- Si $f \;{-}{>}\; l \neq 0$, alors f n'est pas intégrable en $+ \infty$
  $\Leftrightarrow$ Contraposée : si f admet une limite l en $+ \infty$
  Et si f est intégrable en $+ \infty$ alors nécessairement en l = 0
- Si $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$, on ne peut pas conclure sur l'intégrable de f en $+ \infty$

Ex : fonction intégrable en $+\infty$ mais n'admettant pas de limite en $+\infty$



$f \geq 0$

f continue sur $[0, +\infty[$

f n'a pas de limite en $+\infty$

f est bornée

$$\int_0^n f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \to +\infty} 1$$

$\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge = 1

Ex : Intégrale de Bertrand

$$I_{\alpha,\beta} = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$f(t) = \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$, bien définie et continue sur $[e, +\infty[$, $f > 0$

Théorème :

$I_{\alpha,\beta}$ converge ssi soit $\alpha > 1$, soit $\alpha = 1 \ et \ \beta > 1$

Demo :

1) $\alpha < 1$

$t * f(t) \xrightarrow{+\infty} +\infty$ -> pour t suffisamment grand

$t * f(t) \geq 1$

$f(t) \geq \frac{1}{t}$

$\frac{t}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \frac{t^{1-\alpha}}{(\ln t)^\beta}$ $\quad \int_e^{+\infty} f(t)dt = +\infty$

2) $\alpha > 1$

On choisit un reel m tq $1 < m < \alpha$

$t^m * f(t) \xrightarrow[+\infty]{} 0 \Rightarrow$ pour t suffisamment f=grand $t^m * f(t) \leq 1$

$\updownarrow$ $\qquad\qquad$ $0 \leq f(t) \leq 1/t^m$

$\frac{t^{m-\alpha}}{(\ln t)^{\beta}}$

$\Rightarrow f$ intégrable en $+\infty$

$\Rightarrow I_{\alpha,\beta}$ converge

3) $\alpha = 1$

$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^{\beta}} = \lim_{A\to+\infty} \int_e^A \frac{dt}{t(\ln t)^{\beta}}$

$= \lim_{A\to+\infty} \int_e^A \frac{du}{u^{\beta}}$ $converge\ ssi\ > 1$

On pose $u = ln\, t$ et $du = \frac{du}{t}$

$\int_1^{\ln A} \frac{du}{u^{\beta}} = \int_1^{\ln A} u^{\beta} du$

$\lim_{A\to+\infty} \int_1^{\ln A} \frac{du}{u^{\beta}}$ converge si $\beta > t$

III calcul d'intégrales

1/ Intégration par parties

Théorème : Soit I intervalle d'extrémités a< b $\in \mathbb{R} = [-\infty, +\infty]$

Et soient u,v I -> $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$

Si 2 des 3 propriétés suivantes sont vérifiés alors la 3° l'est aussi :

i. $\int_a^b u'(t)v(t)dt$ converge

ii. $\int_a^b u(t)v'(t)dt$ converge

iii. $uv\ converge\ en\ a\ et\ en\ b$

On a alors $\int_a^b u'(t)v'(t)dt = [uv]_a^b - \int_a^b u(t)v(t)dt$

2/ Changement de variable

Théorème : Soit I un intervalle d'extrémités a< b ∈ $\overline{\mathbb{R}}$

Soit $\varphi : I \to J$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $f : J \to \mathbb{R}$ continue par morceaux (J intervalle d'extremité $\alpha - \beta \in \overline{\mathbb{R}}$)

On a équivalence entre :

i/ $\int_a^b (f \circ \varphi(t)) * \varphi'(t) dt$ converge

ii/ $\int_\alpha^\beta f(u) du$ converge

Ex : l'intégrale de Diridulet

Théorème :

a) $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} \, dt$ converge

Mais (f(t) = $\frac{sint}{t}$ sur] 0, $+\infty$[

b) F n'est pas intégrable sur]0, $+\infty$[

Demo :

a) $\alpha > 0, \ \alpha \to 0^+$
$\beta, \beta \to +\infty$

$\int_\alpha^\beta \frac{sint}{t} \, dt = [\frac{1-\cos t}{t}]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \frac{1-\cos t}{t^2} \, dt$
u'(t) = sin t, u(t) = 1 – cos t
v(t) = $\frac{1}{t}$, v'(t) = $-\frac{1}{t^2}$

$\frac{1-\cos t}{t^2}$ õ $\frac{t}{2}$

$cos\ t = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^4)$

$1 - cost = \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^4)$

$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{1-cos\alpha}{\alpha}$ ∃ = 0

$\lim_{\beta \to +\infty} \frac{1-cos\beta}{\alpha}$ ∃ = 0

b) $G(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$

<u>En 0^+</u> : $g(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{2}$

g se prolonge par continuité en 0 $\Longrightarrow$ g intégrable au voisinage de 0

$\lim_{t\to 0^+} g(t) \exists = \frac{1}{2}$

<u>En $+\infty$</u> : $g(t) = \frac{1-\cos t}{t^2} \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(\frac{1}{t^2})$

$\Longrightarrow$ g intégrable en $+\infty$ $\Longrightarrow$ $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge

Retour en haut de page

Retour en page de cours de seconde année