Analyse 2

Intégration sur un intervalle quelconque

Sommaire : Convergence et intégrabilité

I/. Convergence et intégrabilité

1. Convergence d'un intégrale

Def : Soit f : I → ℝ continue par morceaux.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ converge ssi

a. I = [a,b[, a ∈ ℝ, a < b et b ∈ ℝ ∪ { +∞ }

$\int_a^x f(t)dt$ converge lorsque x tend vers b^- (sa limite est notée $\int_a^b f(t)dt$)

b. I =]a,b[, a ∈ ℝ ∪ { −∞ }, a < b et b ∈ ℝ

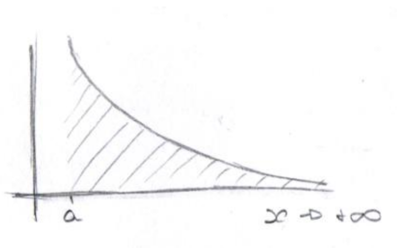
$\int_x^b f(x)dt$ converge lorsque x tend vers a^+

c. I =]a,b[, a ∈ ℝ ∪ { −∞ }, b ∈ ℝ ∪ { +∞ }, a < b

Pour n'importe quel c ∈]a,b[, $\int_c^x f(t)dt$ converge lorsque $x \to b^-$

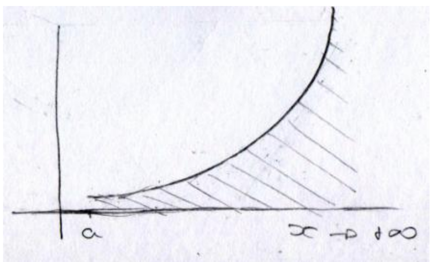
$\int_x^c f(t)dt$ converge lorsque $x \to a^+$

Remarque :



b = +∞

$\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si l'aire est finie



b = +∞

$\int_a^b f(t)dt$ converge si l'aire est finie

Ex :

- Etude de $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$

$f(t) = e^{-t}$, $f \in \mathcal{C}^\infty (\mathbb{R}^+)$

$\int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} + 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge

- Etude de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$

$f(t) = \frac{1}{t}$, $f \in \mathcal{C}^\infty ([1, +\infty[)$

$\int_1^x \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^x = \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge

- Etude de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $x > 0$, $f \in \mathcal{C}^\infty ([0, 1[)$

$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_0^1 = 2\left(1 - \sqrt{x}\right) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 2$

Donc $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge

- Etude de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $f \in \mathcal{C}^\infty (\mathbb{R})$

Etudions $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2}$

- $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = [\tan^{-1} t]_0^x = \tan^{-1} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$
- $\int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = -\tan^{-1} x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\frac{\pi}{2}$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge et $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2}$ converge alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge

- Etude de $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$

$f(t) = t , f \in \mathcal{C}^{\infty}$ ($\mathbb{R}$)

Etudions $\int_{-\infty}^{0} t\, dt$ et $\int_{0}^{+\infty} t\, dt$

- $\int_{-\infty}^{0} t\, dt = [\frac{1}{2}\, t^2]^x = \frac{1}{2}\, x^2 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

Or on a besoin que les 2 convergent, donc on peut conclure dès maintenant que $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ diverge

Propriétés :

i. Soit f : [a,b] → $\mathbb{R}$ continue par morceaux

   $\int_a^b f(t)dt$ converge

ii. Linéarité : Soit f,g : I → $\mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux
   Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent,
   Alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ converge et $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ = $\lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$

iii. Relation de Chasles : Soit f : I → $\mathbb{R}$ continue par morceaux tel que $\int_a^b f$ converge
   Pour tout c, d, e éléments ou extrémités de I, on a :
$$\int_c^d f(t)dt = \int_c^e f + \int_e^d f$$

iv. Croissance : Soit f,g : I → $\mathbb{R}$ continue par morceaux tel que $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent
   Si $f \leq g$ sur I alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Remarque :

1. Si $\int_a^b f$ converge et $\int_a^b g$ diverge, alors $\int_a^b (f+g)$ diverge
2. Si $\int_a^b f$ diverge et $\int_a^b g$ diverge, on ne peut rien dire sur $\int_a^b (f+g)$

Propriétés :

Soit f : [a, b[$\to$ $\mathbb{R}$ continue par morceaux

Si f admet une primitive F sur [a, b[,

Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge ssi F admet une limite en b-

$$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt = \lim_{x\to b^-}[F(x) - F(a)]$$

2. Intégrales de Riemann

Théorème : a. $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

b. $\int_0^1\frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$

Démonstration :

a. $\alpha \neq 1$

$\int_1^x\frac{dt}{t^\alpha} = \int_1^x t^{-\alpha}\,dt = [\frac{1}{1-\alpha}\,t^{-\alpha+1}]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\,(x^{1-\alpha} - 1)$

Converge vers $\frac{1}{1-\alpha}$ si $1-\alpha < 0 \iff \alpha > 1$

Diverge vers $+\infty$ si $1-\alpha > 0 \iff \alpha < 1$

$\alpha = 1$

$\int_1^x\frac{dt}{t} = [\ln t]_1^x = \ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

b. $\alpha \neq 1$

$\int_x^1\frac{dt}{t^\alpha} = [\frac{1}{1-\alpha}\,t^{1-\alpha}]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha}\,(1 - x^{1-\alpha})$

Si $\alpha > 1$ $\int_0^1\frac{dt}{t^\alpha}$ diverge vers $+\infty$

Si $\alpha < 1$ $\int_0^1\frac{dt}{t^\alpha}$ converge vers $\frac{1}{1-\alpha}$

$\alpha = 1$

$\int_x^1\frac{dt}{t} = [\ln t]_x^1 = -\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

$\int_0^1\frac{dt}{t}$ diverge vers $+\infty$

3. Fonction intégrable

Def (l'intégrabilité) : Soit f : I→ $\mathbb{R}$ continue par morceaux

f est dite intégrable ssi il existe M ∈ $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $[\alpha, \beta] \subset$ I,

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(t)|dt \quad \leq \; M$$

Propriétés :

1. f : I→ $\mathbb{R}$ est intégrable ssi
   - $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente,
   - I = [a, b[ou]a, b] ou]a, b[

   On dit alors que $\int_a^b |f(t)|dt$ est absolument convergente

2. Soit f : I→ $\mathbb{R}$ continue par morceaux.
   Si f est intégrable sur I, alors $\int_a^b |f(t)|dt$ converge,
   Et on a :

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

La réciproque est fausse

Remarque : Si $f \geq 0$, $\int_a^b f(t)dt$ converge ssi f est intégrable

Propriété : Comparaison de fonctions positives

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux vérifiant $0 \leq f \leq g$ sur I

a. Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge

b. Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge

Ex : Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+t+1}$

$f(t) = \frac{1}{t^4+t+1} \in \mathcal{C}^\infty$ ([1, +∞[)

$g(t) = \frac{1}{t^4}$

$t^4 \leq t^4 + t + 1$ sur [1, +∞[$\Longrightarrow 0 \leq f(t) \leq g(t)$

D'après le théorème de Riemann, on peut dire que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4}$

On peut conclure que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+t+1}$ converge

Théorème : Comparaison locale

Soit f : [a, b[$\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux , a ∈ $\mathbb{R}$, b ∈ $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et a < b

a. Si $f = \mathcal{O}(g)$ au voisinage de b⁻ avec g intégrable en b⁻ alors f est intégrable en b⁻

b. Si $f = o(g)$ au voisinage de b⁻ avec g intégrable en b⁻ alors f est intégrable en b⁻

c. Si $f \sim g$ au voisinage de b⁻ , alors f est intégrable en b⁻ ssi g est intégrable en b⁻

Commentaire :

I. $\exists\, a < c < b, \exists\, M > 0$ tel que $|f(t)| \leq M * |g(t)|$
$\forall\, t \in$ [c, b[et si $\int_a^b |g(t)| dt$ converge
Alors $\int_c^b |f(t)|\, dt$ converge

II. $\frac{f}{g}(t) \xrightarrow[t \to b^-]{} 0, \ \forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, \eta > 0$ tq si b$*\ \eta \ \leq t \leq b$
Alors $\left|\frac{f}{g}(t)\right| \leq \varepsilon$

III. $\frac{f}{g}(t) \xrightarrow[t \to b^-]{} 1, \ \forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, \eta > 0$ tq si b$*\ \eta \ \leq t \leq b$
Alors $\left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| \leq \varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{f}{g}(t)\right| \leq 1 - \varepsilon$

Retour en haut de page

Retour en page de cours de seconde année