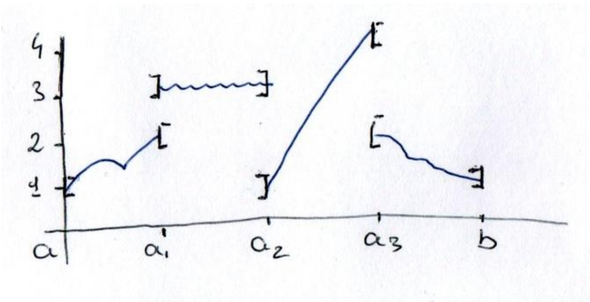
Analyse 2

Sommaire :

Intégration sur un segment (intervalle fermé, bornée [a,b], a,b ∈ $\mathbb{R}$, a $\leq$ b)

Def : f : [a,b] → $\mathbb{R}$, avec (a < b), continue par morceaux ssi il existe une subdivision de [a,b]

$a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ vérifiant ∀ $1 \leq i \leq n$, $f|_{]a_{i-1}, a_{1}[}$ est continue, et les deux limites $\lim_{x \to a_{i-1}^+} f(x)$ et $\lim_{x \to a_i^-} f(x)$ existent et sont finies.



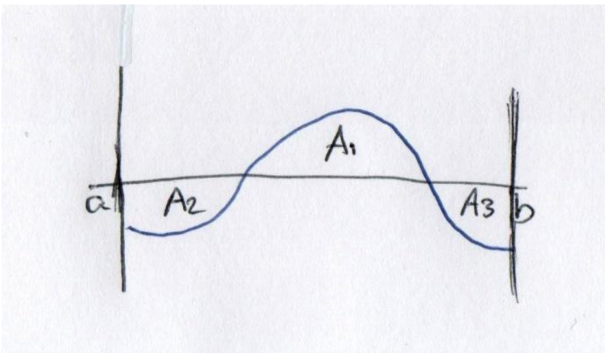
$f(a_1) = 2.5$

$\lim_{x \to a_{i-1}} f(x) = 2$

$\lim_{x \to a_i} f(x) = 3$

Def : f : [a,b] → $\mathbb{R}$, avec (a < b), continue par morceaux

$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f(t)dt$ l'aire algébrique entre l'arc x et le graphe Γf de f



$\int_{[a,b]} f = -A_2 + A_1 - A_3$

Def : f : I → $\mathbb{R}$ (sous ensemble de $\mathbb{R}$) est continue pm sur I.

Elle est continue pm par bout [a,b] ⊂ I : $\mathcal{C}^0_{pm}$ (I)

Def : f : I → $\mathbb{R}$ continue pm, alors par bout [a,b] ⊂ I

$\int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f$ si a ≤ b

$\int_a^b f(t)dt = -\int_{[b,a]} f$ si b < a

Propriété de l'integrale :

1. Linéarité : Soit f,g ∈ $\mathcal{C}^0_{pm}$ (I), soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, soit a,b ∈ I

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\, dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$$

2. Relation de Chasles : f : I → $\mathbb{R}$ continue pm, a,b,c ϵ I

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

3. Croissance : Soit f,g : [a,b] → $\mathbb{R}$ continue pm

Si f ≤ g sur [a,b] alors $\int_a^b f \le \int_a^b g$

4. Inégalité triangulaire : f : [a,b] → $\mathbb{R}$ continue pm

Alors $\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f|$

Théorème : Soit f : [a,b] → $\mathbb{R}$ continue

$\int_a^b f(t)dt = 0$ et f ≥ 0 ⟺ f est identiquement nulle sur [a,b]

Primitive et intégrale

Def : Soit : f : I → $\mathbb{R}$

On dit que F : I → $\mathbb{R}$ est une primitive de f ssi :

- F est dérivable sur I
- F' = f sur I

Propriété :

Si f admet une primitive F sur I,

Alors toutes les primitives de f sont exactement toutes les fonctions de la forme F + constante

Théorème :

1. Soit f : [a,b] → $\mathbb{R}$ une fonction continue sur pm et c ϵ I
   Alors x $\overset{F}{\rightarrow}$ $\int_c^x f(t)dt$ est une fonction définie et continue sur [a,b]
2. Si f continue, alors F est l'unique primitive de f nulle en c
   $\updownarrow$
   F dérivable sur [a,b], F' = f, F(0) = 0

Corollaire : Soit f : I → $\mathbb{R}$, f continue et F une primitive de f sur I

Alors, ∀ a,b ∈ I $\int_a^b f(t)dt$ = $[F(t)]_b^a$ = F(b) – F(a)

Calcul d'intégrale :

Intégration par partie :

Théorème : Soit f,g : I → $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est dire dérivée continue), soit a,b ϵ I,

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Ex : 1. $\int_a^b P(x)e^{\alpha x}\, dx = [P(x)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}]_a^b - \int_a^b \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} * P'(x)dx$

2. In = $\int_0^{\pi/2} sin^n\,(t)dt$
   n = 1 : I_1 = $[\,cos\,(t)\,]_0^{\pi/2}$
   n = 2 : I_2 = $\int_0^{\pi/2} \frac{1-cos2(t)}{2}\, dt$
   il faut obtenir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}

Changement de variable :

Théorème : Soit u : I → J de classe $\mathcal{C}^1$

Et f : J → $\mathbb{R}$ continue (I et J sous ensemble de $\mathbb{R}$)

Soit l'intervalle d'extrémité a et b ⊂ I

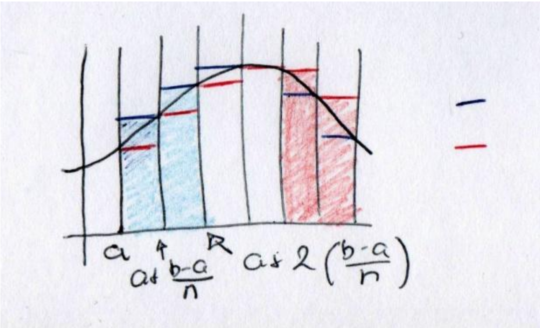
$\int_a^b f\big(u(t)\big)u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx$ (avec $x = u(t)$ et $dx = u'(t)dt$)

Sommes de Riemann :

Théorème : Soit f : [a,b] → $\mathbb{R}$ continue pm

$$Sn = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n \to +\infty} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(t)dt$$

$$Sn' = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n=1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) \longrightarrow \int_a^b f(t)dt$$



Départ section de la courbe
Départ origine de la courbe

b - a = longueur de l'intervalle [a,b]

Tableau des primitives :

Fonction	Primitive
$\frac{1}{t}$, t ∈ $\mathbb{R}$ *	ln |t|, t ∈ $\mathbb{R}$ *
ln |t|, t > 0	t ln (t) - t
$\frac{1}{(1-t^2)}$, t ≠ $\pm\infty$	$\frac{1}{2}$ ln $\left\|\frac{(1+t)}{(1-t)}\right\|$
$\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)}}$, $\mathbb{R}$	ln (t + $\sqrt{(1+t^2)}$)
$\frac{1}{\sqrt{(t^2-1)}}$, t < -1, t > 1	ln | t + $\sqrt{(1+t^2)}$ |

Fractions rationnelles :

$\frac{P(x)}{Q(x)}$, P et Q polynôme à coefficient réels

Théorème :

$\frac{P}{Q}$ se décompose en éléments simples, admettons

$$P(x) = (x - r_1)^{k1} * \dots * (x - r_n)^{kn} * (a_1\, x^2 + b_1\, x + c\,)^{m1} * \dots * (a_r\, x^2 + b_r\, x + c\,)^{mr}$$

Alors, avec E(x) un polynôme :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{\alpha_{1k1}}{(x - r_1)^{k1}} + \frac{\alpha_{1(k-1)}}{(x - r_1)^{k-1}} + \dots + \frac{\alpha_{11}}{(x - r_1)} + \dots + \frac{\beta_{1m1}\, x + \gamma_{1m1}}{(\,a_1\, x^2 + b_1\, x + c_1)^{m1}} + \frac{\beta_{1m1-1}\, x + \gamma_{1m1-1}}{(\,a_1\, x^2 + b_1\, x + c_1)^{m1-1}} + \dots + \frac{\beta_{11}\, x + \gamma_{11}}{(\,a_1\, x^2 + b_1\, x + c_1)^{1}}$$

Pm = par morceau

[Retour en haut de page]

[Retour en page de cours de seconde année]