Série de Fourier

Def : une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π – périodique si $\forall\, n \in \mathbb{R}, f(t+2\pi) = f(t)$

Ex : $n \in \mathbb{Z}$

- $t \to e^{int}$ est 2π- périodique
  $e^{in(t+2\pi)} = e^{int} * e^{in2\pi}$ (=$e^{int} * 1$)
- $t \to \cos\,(nt)\,, \sin\,(nt)$
  $\cos(nt + n2\pi) = \cos\,(nt)$ et idem pour sinus

Def :

a. $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues et 2π-périodique
b. $\mathcal{CM}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continuent par morceaux $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et 2π-périodiques

Prop :

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et soit $a, b \in \mathbb{R}$

$\int_a^{a+2\bar{n}} f(t)dt$ ne dépend pas de a = $\int_b^{b+2\bar{n}} f(t)dt$

On note " $\int_{2\pi} f$ " l'intégrale de f sur une période quelconque [a, a + 2π]

Ex : $\int_0^{2\pi} \cos(nt)\, dt = 0 = \int_0^{2\pi} \sin(nt)\, dt$

I. Polynômes trigonométriques

Def : Soit $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n la fonction $\mathcal{C}_{2\pi}$ définie par $e_n(t) = e^{int}$

Th : $\forall n\,, m \in \mathbb{Z}$, on a $\int_0^{2\pi} e^{int} * e^{-int} dt = \delta_{nm} = 0\ si\ n \neq m\ et\ 2\pi\ sinon$

Démo : $\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = \left[\frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)t}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{i(n-m)}(1-1) = 0\ si\ n \neq m$

Si $n = m, \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi$

$P(x) = \sum_{n=0}^{d} a_n x^n$ polynôme classique

Def : On appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire de la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ $\sum_{n=-d}^{d} tne^{int}$

Ex : $e^{-it} + 1 + e^{it} - 2e^{2it}$

$\cos(nt) = \frac{1}{2}e^{int} + \frac{1}{2}e^{int}$

$\sin(nt) = \frac{1}{2i}e^{int} - \frac{1}{2i}e^{-int}$

II. Coefficient de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, f $\in \mathcal{CM}_{2\pi}$

Def :

a. $\forall n \in \mathbb{Z}$, on pose $C_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} f(t)e^{-int}dt$
   Le coeff de Fourier exponentiel d'indice n de f
   Ex : $C_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} f(t)dt$ valeur moyenne de f
b. $\forall n \in N$, on pose
   $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$
   $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$