Analyse

I. Dérivation de séries entières

Def : Soit$\sum_{n\geq0} a_n x^n$ une série entière de rayon de cv R>0

On appelle série entière « dérivée » la série entière suivante

$$\sum_{n\geq1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq0} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Proposition

a. La série entière « dérivée » a pour rayon de cv = R
b. La somme S de la série entière $\sum_{n\geq0} a_n x^n$
   $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur]-R,R[
   Et $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1 = a_{n+1} x^n$,$\forall\, x \in]-R, R[$
c. S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur]-R, R [

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \qquad S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}\,, \qquad p = 0, S^{(0)} = S$$

Th : (unicité des coeff d'un série entière)

Soit $\sum_{n\geq0} a_n x^n$ une série entière de rayon de cv R (>0) de somme S.

Alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n}$ -> coeff de taylor

Corollaire :

Soit $\sum_{n\geq0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq0} b_n x^n$ 2 série entières de rayon cv R_a, R_b (>0)]-r,r[$\subset] - R_{\frac{a}{b}}, R_{\frac{a}{b}}[$

S'il existe 0< $r \leq \min(R_a, R_b)$

tel que $S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = S_b(x) == \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ sur]-r,r[

alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$

II. Fonction développables de séries entières

Def : Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et r>0 tel que]-r, r[$\subset I$

On dit que f est developpable en série entière sur]-r, r[

s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon cv R$\geq r$

tel que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur]-r, r[

Ex : $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$,]-1,1[

$\ln 1 + x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{x}$,]-1,1[

Ex : $\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, x \in]-1,1[$

$\left[\frac{1}{1+x^2}\right]$ = $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

III. Série de Taylor

Def : Soit $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ $I \supset]-r, r[\ni 0$

On appelle série de Taylor de f en l'origine la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Th : Si f est développable en série entière sur]-r, r[alors f y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et égale à la somme de sa série de Taylor en 0

Il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ non développable en série entière

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}}\, si\ x > 0 \\ f(x) = 0\ si\ x \leq 0 \end{cases}$$

$\lim_{n\to 0^+} f(x) = 0, x > 0,\ f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\, et\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{u\to +\infty} u^2 e^{-u} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f^{(p)}(x) = 0\ \forall p \geq 1, f^{(p)}(0) = 0\ \forall p \geq 0$

La sériée de Taylor de f est identiquement nulle,

f n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ sur n'importe quel intervalle]-r, r[

Opération sur les fonctions développables en série entière

1. $f : \sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad R_a$
   $\lambda f : \sum_{n>+0} (\lambda a_n) x^n \quad R_a$
   $g : \sum_{n\geq 0} b_n x^n \quad R_b$
   $f + g : \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n \quad R \leq \min\ (R_a, R_b)$
   $Ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}$
   $Sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$

2. $f : I \rightarrow \mathbb{C}$
   $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n ,]-r, r[$
   $\overline{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} x^n ,\ ]-r, r[$
   $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
   $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
   $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
   $\overline{e^{ix}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{ix}} = \cos x - i \sin x$

$$\left.\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ e^{-ix} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$