Séries entières

L'étude de série de fonction du type $x \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$

I. Définition et premières propriétés

a. Def :

On appelle série entière de coefficients (a_n) (reel en complexe) la série de fonction $\sum f_n$

Ou $\begin{matrix} f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ Z \to a_n Z^n \end{matrix}$: par abus on note cette série $\sum a_n Z^n$

L'ensemble D dans $\mathbb{Z} \epsilon \mathbb{C}$ pour lesquels $\sum a_n Z^n$ converge est appellée domaine de convergence de la série entière et la fonction S : $\begin{matrix} D \to \mathbb{C} \\ Z \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n Z^n \end{matrix}$ est appelée la somme de la série entière

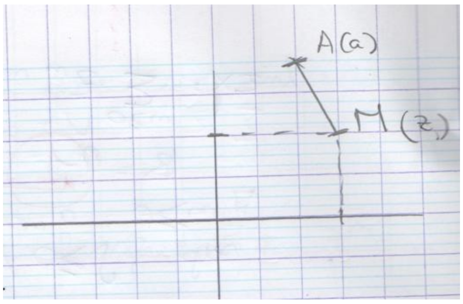
Remarque : $a_n Z^n = 0$ en Z = 0, $S(0) = a_0$ et 0 $\in D$

Ex : $\sum_{n\geq 0} Z^n \qquad Z^n = |Z|^n * e^{ni\theta}$

$(\sum_{k=0}^{n} Z^k)(1 - Z) = 1 - Z^{n+1}$

$\sum_{k=0}^{n} Z^k = \frac{1-Z^{n+1}}{1-Z} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1-Z}$

Si $|Z| < 1 \quad |Z|^n \to 0, Z^n \to 0$ et D > D(0,1)

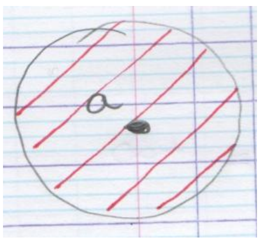


|Z – a | = dist (A, M)

A ↔ a, dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^2$

Z = x+iy $\curvearrowright M \epsilon \mathbb{R}^2$

$a \in \mathbb{C}$ *et* $R > 0$



$D(a,R) = \{Z \in \mathbb{C}, |Z - a| < R\}$ disque ouvert centré en a et de rayon R

$\overline{D}(z,R) = \{Z \in \mathbb{C}, |Z - a| \leq R\}$ disque fermé

Ex : La série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{Z^n}{n!}$ converge ∀ Z ∈ ℂ et par définition sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{Z^n}{n!} = \exp Z = e^Z$

Soit $Z\ \in\ \mathbb{C}^*$ fixé, $Un = \frac{Z^n}{n!}$

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \frac{|Z|^{n+1}}{(n+1)!} * \frac{n!}{|Z|^n} = \frac{|Z|}{n+1} \to 0$$

$\sum\frac{Z^n}{n!}$ converge alors en tout Z ∈ ℂ

b. Rayon de convergence

Def : On appelle rayon de convergence la série entière $\sum a_n Z^n$, le nombre :

$$R = \sup\{\, f \geq 0 /\ la\ suite\ (a_n f^n)_n\ est\ bornée\}$$

$$R\ \in\ \mathbb{R}^+\ \cup \{+\infty\}$$

Ex : $\sum_{n\geq 0} Z^n$, $\forall\, n \geq 0,\quad a_n = 1$

R = $\sup\{f\, \geq 0\ /\ la\ suite\ (p^n) bornée\} = \sup[0,1]\, =\, 1$

$\sup\left\{p \geq 0\ /\ la\ suite\ \left(\frac{p^n}{n!}\right) bornée\right\} = \sup \mathbb{R}^+\, = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{p^n}{n!} = 0$

Formule de Stirling

$n!\ \underset{n\to+\infty}{\widetilde{\quad}}\ \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$\frac{p^n}{n!} \sim \frac{e^{n\ln p}}{(2\pi n)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{e}{n}\right)^n = \exp[n\ln p + n\ln\left(\frac{e}{n}\right) - \frac{1}{2}\ln(2\pi n)]\ \sim \exp(-n\ln) \to 0$

Lemme d'Abel

Soit p > 0 tel que la suite $(a_n p^n)$ est bornée

Alors pour tout Z ∈ ℂ tq |Z|<p , la série entière $\sum a_n Z^n$ est absolument convergente en Z

Démo : $a_n Z^n = a_n * p^n * \left(\frac{Z}{p}\right)^n = \mathcal{O}\left(\left(\frac{Z}{p}\right)^n\right) \to\ \sum_{n\geq 0} a_n Z^n\ \ absolument\ convergente\ en\ Z$

Si |Z| < p, $\left|\frac{Z}{p}\right| <\ 1$ $\quad\left(\frac{Z}{p}\right)^n$ est le terme générale d'une série absolument convergente

Th : Soit $\sum a_n Z^n$ une série entère

Soit R son rayon de convergence

Soit Z ∈ ℂ

a. Si |Z| < R, alors la série $\sum a_n Z^n$ converge absolument en Z
b. Si |Z| > R, alors diverge en Z (grossièrement, la suite $(a_n Z^n)$ n'est pas bornée)

Calcul de rayon de convergence

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n Z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a

Soit $\sum_{n\geq 0} b_n Z^n$ ___________________________________ R_b

Th :

a. Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ alors $R_a > R_b$
b. Si $a_n = \sigma(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$
c. Si $|a_n| \sim (b_n)$ alors $R_a = R_b$

Démo :

a. Soit $|Z| < R_b \implies \sum_{n\geq 0} b_n Z^n$ absolument convergente en Z
   Or $a_n = \mathcal{O}(b_n)$
   Donc $\exists\, M = 0$ tel que $|a_n| \leq M|b_n|$, pour tout n ($\frac{a_n}{b_n}$ est bornée)
   $0 \leq |a_n Z^n| \leq \underbrace{M|b_n Z^n|}_{tengante\ d'unesérie\ convergente}$
   $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n Z^n$ absolument convergente
   $|Z| < R_b \rightarrow |Z| \leq R_a$
   Si Z ∈ $D(0, R_b)$ alors Z ∈ $D(0, R_a)$
   $D(0, R_b) \subset D(0, R_a)$
   $R_b \leq R_a$
   $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \rightarrow 1$ et $\left|\frac{b_n}{a_n}\right| \rightarrow 1$
b. $a_n = \sigma(b_n) \iff a_n = \mathcal{O}(b_n)$
c. $|a_n| \sim |b_n|$
   $\Rightarrow a_n = \mathcal{O}(b_n) \rightarrow R_a \geq R_b$
   $b_n = \mathcal{O}(a_n) \rightarrow R_b \geq R_a$

Ex : $\sum_{n\geq 0} a_n Z^n$, $\sum(-1)^n a_n Z^n$, $\sum|a_n| Z^n$: 3 séries entières de même rayon de convergence

Règle de d'Alembert

Th : Soit (a_n) une suite complexe avec $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang

Si $\left(\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

Alors la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n Z^n$ a pour rayon de convergence $R = \frac{1}{l}$

Opération sur les séries entières :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n Z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n Z^n$ 2 séries entières de rayon de convergence R_a et R_b

Th :

a. Si $\lambda \neq 0$, $(\lambda \in \mathbb{C})$ alors la série entières $\sum_{n\geq 0}(\lambda a_n)Z^n$ a pour rayon de convergence R_a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n Z^n = \lambda * \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n Z^n\right)$$

b. La série entière « somme » $\sum_{n>+0}(a_n + b_n)Z^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min(R_a, R_b)$
Et si $|Z| < \min(R_a, R_b)$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)\, Z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n Z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n Z^n$$
Remarque : $\sum_{n\geq 0} Z^n \rightarrow \quad R_a = 1 \ : \ a_n = 1, \forall n \geq 0$
$\sum_{n\geq 1} -Z^n \rightarrow \quad R_b = 1 \ : \quad b_n = 1, \forall n \geq 1 \ \ et\ b_0 = 0$
$1 + \sum_{n\geq 1}(1-1)Z^n = 1 \quad : \quad R = +\infty$
$+\infty = \sup\{p \geq 0, la\ suite\ (a_n p^n)\ bornée\}$
$a_\infty = 1; \quad a_n = 0, \ \forall n \geq 1$

Remarque : si $R_a \neq R_b$, par exemple $R_a < R_b$
Alors $R = \min(R_a, R_b) = R_a$

c. La série entière « produit » $\sum_{n\geq 0} c_n Z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \forall n \geq 0$
$c_0 = a_0 b_0$
$c_1 = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = a_0 b_1 + a_1 b_0$
$c_2 = \sum_{k=0}^{2} a_2 b_{2-k} = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$
Et pour $|z| < \min(R_a, R_b)$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n Z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n Z^n\right) * \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n Z^n\right)$$

Démo :

$$c_n Z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} Z^n = \sum_{k=0}^{n} (a_k Z^k) * (b_{n-k} Z^{n-k})$$

$$\sum_{n=0}^{N} c_n Z^n = \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k Z^k * b_{n-k} Z^{n-k}\right) = T_N\left[\left(\sum_{i=0}^{N} a_i Z^i\right)\left(\sum_{j=0}^{N} b_j Z^j\right)\right]$$

Th : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n Z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a > 0$

Cette série converge normalement sur tout disque fermé D(0,r) où $0 < r < R_a$

Corolaire : S la somme de cette série entière est une fonction continue sur $D(0, R_a)$

Série entière d'une variable réelle

$\sum_{n\geq 0} a_n Z^n$ une série entière

On l'a restreint à l'axe réel : $Z \in \mathbb{R}$ que l'on note x

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

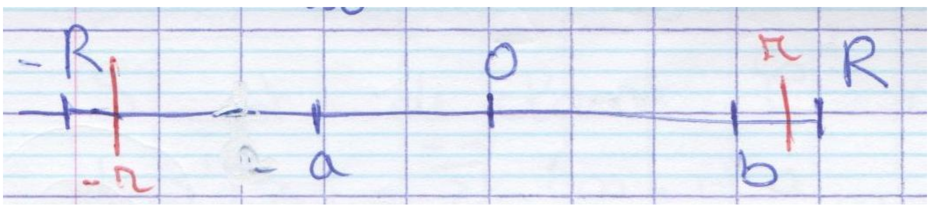
$0 < R =$ rayon de convergence de la série

- $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge absolument si $x \in]-R, R[$
- $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge si $x \in]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$
- Pour $x = R$, ça dépend de la série
- $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur tout intervalle du type $[-r, r] \subset]-R, R[$ où $r < R$

S la somme de la série est continue sur $]-R, R[$

Intégration : Soit $-R < a < b < R$

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b a_n x^n dx\right)$$



Rappel : f continue sur $[a, b]$

La primitive F de f nulle en 0 définie sur [a,b] est : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

Corollaire :

$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est une série entière de rayon de convergence R (rayon de convergence de S la somme de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$)

Sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est la primitive de S, nulle en 0, sur $]-R, R[$

Ex : $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x), \qquad |x| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \ln(1+x), \quad |x| < 1$$