Analyse 2

Sommaire :

Formules de Taylor

Def : f :] a,b [$\rightarrow$ $\mathbb{R}$ (a < b)

c ∈] a,b [, f est dérivable en c ssi $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ admet une limite lorsque $x \rightarrow$ c ($x \neq$ c), que l'on nome $f'(c)$.

Def : f est dite continument dérivement sur un intervalle I, ssi f est dérivable sur I et f' est une fonction continue sur I. On note f ϵ $\mathcal{C}$'(I)

Def : f est de classe $\mathcal{C}^p$(I) (p ≥ 1) ssi f est p fois dérivable sur I et $f^{(p)}$ est continue sur I

Th des Accroissements Fini :

f : [a,b] $\rightarrow$ $\mathbb{R}$, si f continue sur [a,b] et f dérivable sur] a,b [

Alors il ∃ c ∈] a,b [tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Formule de Taylor-Lagrange (Th)

Si f est une fonction définie et n fois dérivable sur [a,b], (n + 1) fois dérivable sur] a,b [

Alors il ∃ c ∈] a,b [tq

$$f(b) = f(a) + f'(a) * (b - a) + \dots + \frac{(b-a)^k}{k\,!} f(k)(a) + \dots + \frac{(b-a)^k}{k\,!} f(n)\,(a) + \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} f(n+1)\,(c)$$

Formule de Taylor-Young (Th)

Si f est une fonction n fois dérivable sur le voisinage V =] a – h, a + h [(h > 0) , si $f^{(n+1)}(a)$ existe, et si $\varepsilon(x)$ une fonction définie sur I qui tends vers 0 lorsque x tend vers a

Alors pour tout x tel que $|x| < h$, on a :

$$f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + x^{n+1} * \varepsilon(x)$$

Ainsi la formule générale de Taylor est :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + (x-a)^n * \varepsilon(x)$$

Développements limités

Def : Une fonction définie sur I ∋ 0 (contenant l'origine) admet un DL d'ordre n au voisinage de 0 ssi il existe un réel h > 0, x tel que $|x| < h$, une fonction polynomiale Pn de degré ≤ n, et une fonction ε de limite nulle en 0 tel que :

$$f(x) = Pn(x) + x^n * \varepsilon(x), x \in I$$

Calcul de DL :

- Somme : On additionne tout ensemble

$(f + g)(b) = f(a) + g(a) + f'(a) * (b - a) + g'(a) * (b - a) + \dots$ ect

- Produit : f(x) = Pn(x) + $x^n \varepsilon_1(x)$

g(x) = Qn(x) + $x^n \varepsilon_2(x)$

(f * g)(x) = Tn [Pn(x) * Qn(x)] + $x^n * \varepsilon(x)$

- Division : g(0) ≠ 0, f/g bien de f au V(0)

(f/g)(x) = Zn(x) + $x^n * \varepsilon(x)$

Où Zn est le quotient de la division suivant les puissances croissantes de Pn par Qn

DL d'une fonction dérivée :

f(x) = Pn+1 (x) + x^{n+1} * ε(x)

f'(x) = P'n+1 (x) + x^n * ε(x)

$\frac{1}{1-x}$ = 1 + x + … + x^n + x^n * ε_1(x)

$\frac{1}{1+x}$ = 1 – x + x^2 - … + $(-1)^n$ x^n + x^n ε_2 (x)

ln (1 + x) = x - $\frac{x^2}{2}$ + $\frac{x^3}{3}$ + … + $(-1)^n$ $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ + x^{n+1} ε(x)

DL d'une fonction composée :

f(x) = Pn(x) + x^n ε_1(x) f(0) = 0 donc Pn(0) = 0

g(x) = Qn(x) + x^n ε_2(x)

(g ∘ f) (x) = g(f(x)) = Tn [Qn (Pn (x))] + x^n ε (x)

Qn (x) = a_0 + a_1x + … $a_n x^n$

Qn (Pn (x)) = a_0 + a_1 Pn(x) + … + a_n $(Pn(x))^n$

o, O, équivalents

f, g au voisinage d'un point x_0

f_{x0} = o (g) ↔ $\lim_{x \to x0} \frac{f(x)}{g(x)}$ = 0

$\cancel{\Uparrow}$ $\Downarrow$

f_{x0} = O (g) ↔ f/g est bornée de V(x_0) ↔ ∃ M < 0 tq $|\frac{f(x)}{g(x)}| \leq M$

f(x) = Pn(x) + o(x^n) = x^n * ε(x) avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x)$ = 0

↕

f(x) = Pn(x) + O(x^{n+1})

↕

f admet un DL_n (0)

Def : Soit f et g définie au V(x_0)

On dit que f $\underset{x_0}{\sim}$ g (équivalent au V(0)) ssi $\lim_{x \to x0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe et vaut 1

$x + x^2 \underset{0}{\sim} x + x^3$

$x \underset{0}{\sim} x$

$(x + x^2) - x = x^2 \cancel{\underset{0}{\sim}} (x + x^3) - x = x^3$

$f \underset{x_0}{\sim} g \cancel{\Rightarrow} f - g \to 0$

$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2}$ et $\frac{1}{x} \to +\infty$

Tn = On tronque à l'ordre de n

[Retour page de cours seconde année]

[Retour en haut de page]