COURS D'ANALYSE

Licence d'Informatique, première année

Laurent Michel

Printemps 2010

Table des matières

Chapitre 1

Éléments de logique

Dans cette première partie du cours, on introduit très rapidement quelques outils permettant de formaliser les idées mathématiques et d'obtenir des moyens systématiques de traiter les problèmes.

1.1 Fabriquer des énoncés

1.1.1 Enoncés élémentaires

Dans cette partie, on tente de donner les outils nécessaires à la formulation précise d'énoncés mathématiques. On veut par exemple formaliser des phrases du type suivant :

– "la somme de deux nombres positifs quelconques est un nombre positif"
– "le carré de n'importe quel nombre réel est un nombre positif."
– "tout nombre réel positif est le carré d'un nombre réel".
– etc.

Plus précisément, on cherche une manière systématique décrire des énoncés utilisant le moins de mots possible (de manière à éliminer toute ambiguité et de raccourcir les énoncés.

On introduit donc les notations suivantes (ou quantificateurs) :

Définition 1.1.1 – *"pour tout" se note* $\forall$
– *"il existe " se note* $\exists$
– *"appartient" se note* $\in$
– *"tel que" se note* tq

On appelera *énoncé élémentaire* toute phrase fabriquée a l'aide des symboles précédents, "ayant un sens".

Exemple 1.1.1 *Avec ces notations on peut traduire de la manière suivante :*
– *"la somme de deux nombres positifs quelconques est un nombre positif" se traduit par*

$$\forall a \in [0, +\infty[, \forall b \in [0, +\infty[,\ a + b \geq 0$$

– *"le carré de n'importe quel nombre réel est un nombre positif" se traduit par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

– *“tout nombre réel positif est le carré d’un nombre réel” se traduit*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, \ tq \ x = y^2$$

Exercice 1.1.1 *Traduire “il existe un nombre rationnel dont le carré vaut deux”.*

Exercice 1.1.2 *Soit $f : E \to F$. On dit que f est surjective si tout élément de F est l’image par f d’au moins un élément de E. Traduire cette définition avec des quantificateurs.*

Remarque 1.1.1 (importante) *Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ ne commutent pas. Par exemple les énoncés suivant ne sont pas du tout équivalents :*
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$
- $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq y$.

Les quantificateurs permettent de fabriquer des énoncés élémentaires. Pour obtenir des énoncés plus complexes, on peut utiliser des ”mots de liaison” entre énoncés : ”et, ou, implique, contraire”.

1.1.2 Enoncés complexes

Disposant d’énoncés élémentaires, il possible de fabriquer des énoncés plus compliqués. Par exemple, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux assertions , on voudra parler des enoncés : ”$\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$”, ”$\mathcal{A}$ *ou* $\mathcal{B}$”, etc.

Définition 1.1.2
- $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ *se note* $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
- $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ *se note* $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
- *“$\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$ ” se note* $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$
- *“contraire de $\mathcal{A}$” se note* $\rceil \mathcal{A}$.

Exemple 1.1.2 *Soit $f : E \to F$. On dit que f est injective si deux éléments quelconques de E et différents ont des images différentes. Avec l’aide des quantificateurs, cela se traduit*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y))$$

Exercice 1.1.3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est croissante si deux éléments quelconques de $\mathbb{R}$ ordonnés ont leurs images par f rangées dans le même ordre. Traduire cette phrase avec des quantificateurs.*

Définition 1.1.3 *On appelera* énoncé mathématique *ou* assertion *toute phrase fabriquée a l’aide des symboles précédents, ”ayant un sens”.*

Si l’on a une information à priori sur la véracité des assertions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ on peut conclure sur la veracité d’assertions fabriquées avec $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, en utilisant les tables de vérité. Dans les tableaux suivants on note ”V” une assertion ”vraie” et ”F” une assertion fausse.

1. *Table de vérité du* contraire

$\mathcal{A} = V$	$\rceil \mathcal{A} = F$
$\mathcal{A} = F$	$\rceil \mathcal{A} = V$

2. *Table de vérité du* et

	$\mathcal{B} = V$	$\mathcal{B} = F$
$\mathcal{A} = V$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = V$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = F$
$\mathcal{A} = F$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = F$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = F$

3. *Table de vérité du* ou

	$\mathcal{B} = V$	$\mathcal{B} = F$
$\mathcal{A} = V$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = V$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = V$
$\mathcal{A} = F$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = V$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = F$

4. *Table de vérité du* implique

	$\mathcal{B} = V$	$\mathcal{B} = F$
$\mathcal{A} = V$	$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B} = V$	$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B} = F$
$\mathcal{A} = F$	$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B} = V$	$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B} = V$

Exercice 1.1.4 *Ecrire la table de vérité de $\rceil\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$. Comparer avec celle de $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$.*

1.2 Nier un énoncé

Tout énoncé mathématique peut être nié en utilisant les règles suivantes :

ÉNONCÉ	ÉNONCÉ CONTRAIRE
Pour tout élément x de l'ensemble E, la propriété P(x) est vérifiée	Il existe un élément x de l'ensemble E tel que la propriété P(x) n'est pas vérifiée
Il existe un élément x de l'ensemble E tel que la propriété P(x) est vérifiée	Pour tout élément x de l'ensemble E, la propriété P(x) n'est pas vérifiée
L'assertion $\mathcal{A}$ et l'assertion $\mathcal{B}$ sont vraies	L'assertion $\mathcal{A}$ est fausse ou (non exclusif) l'assertion $\mathcal{B}$ est fausse.
L'assertion $\mathcal{A}$ est vraie ou (non exclusif) l'assertion $\mathcal{B}$ est vraie.	L'assertion $\mathcal{A}$ et l'assertion $\mathcal{B}$ sont fausses.
Si l'assertion $\mathcal{A}$ est vraie alors l'assertion $\mathcal{B}$ est vraie	L'assertion $\mathcal{A}$ est vraie ET l'assertion $\mathcal{B}$ n'est pas vraie

En utilisant les quantificateurs, les règles précédentes prennent la forme suivante :

ÉNONCÉ	ÉNONCÉ CONTRAIRE
$\forall x \in E,\ P(x)$	$\exists x \in E,\ \text{tq} \rceil P(x)$
$\exists x \in E,\ \text{tq}\ P(x)$	$\forall x \in E,\ \rceil P(x)$
$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\rceil\mathcal{A} \vee \rceil\mathcal{B}$
$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\rceil\mathcal{A} \wedge \rceil\mathcal{B}$
$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ et $\rceil\mathcal{B}$

Remarque 1.2.1 *On notera que la négation transforme les quantificateurs $\forall$ en $\exists$ et $\exists$ en $\forall$.*

Exemple 1.2.1 *Considérons l'assertion $\mathcal{A}$ suivante*

$$\exists x \in \mathbb{Q}, \ tq\ x^2 = 2.$$

L'assertion contraire de $\mathcal{A}$ est

$$\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \neq 2.$$

Exemple 1.2.2 *On rappelle qu'une fonction $f : E \to F$ est injective si*

$$\forall x \in E, \forall y \in E, (x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)).$$

Avec les règles précédentes, on obtient la négation de "f est injective" :

$$\exists x \in E, \exists y \in E, \quad tq\ x \neq y \ et\ f(x) = f(y).$$

Exercice 1.2.1 *Nier les énoncés suivants :*
- *$f : E \to F$ est surjective.*
- *$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c = 0$.*

Exercice 1.2.2 *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante si la propriété suivante est vérifiée :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)).$$

Nier cet énoncé.

1.3 Prouver ou infirmer un énoncé

1.3.1 Démonstration directe

Les règles élémentaires pour démontrer une assertion sont les suivantes :

1. *Enoncé du type $\forall x \in E$, $\mathcal{A}(x)$.*
   On se donne x au hasard dans E (on ne prend surtout pas de valeur particulière pour x) et on démontre la propriété $\mathcal{A}(x)$ en utilisant des propriétés connues.
2. *Enoncé du type $\exists x \in E$, $\mathcal{A}(x)$.*
   On doit prouver l'existence d'un $x \in E$ tel que $\mathcal{A}(x)$ est vraie (il n'est pas nécessaire et souvent pas possible de montrer $\mathcal{A}(x)$ pour tout x).
3. *Enoncé du type $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.* On démontre $\mathcal{A}$ puis on démontre $\mathcal{B}$ (ou inversement).
4. *Enoncé du type $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$.* On suppose que $\mathcal{A}$ est faux et on en déduit que $\mathcal{B}$ est vraie (ou inversement).
5. *Enoncé du type $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$.*
   On suppose que $\mathcal{A}$ est vraie et on démontre $\mathcal{B}$.

A l'aide de ces règles basiques et en procédant inductivement on peut tenter de démontrer n'importe quel énoncé. Pour infirmer un énoncé $\mathcal{A}$, on doit démontrer $\rceil \mathcal{A}$.

Exemple 1.3.1 *L'énoncé $\mathcal{A}$ suivant : $\forall x \in [0, 2], x^2 + 1 < 6$ est vrai.*

Preuve. L'énoncé est de la forme $\forall x \in [0,2], \mathcal{A}(x)$ avec la propriété $\mathcal{A}(x)$: $x^2 + 1 < 6$. On fait appel à la première des règles ci-dessus. On se donne $x \in [0,2]$ et on démontre $\mathcal{A}(x)$. Comme $x \in [0,2]$, $x^2 \leq 4$ et donc $x^2 + 1 \leq 5$. Par suite $x^2 < 6$. □

Exemple 1.3.2 *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = (x-1)^2$ est surjective.*

Preuve. On doit démontrer la propriété suivante :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}, \ \text{tq } f(x) = y.$$

Soit $y \in \mathbb{R}^+$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit, on cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $(x-1)^2 = y$. Comme $y \geq 0$, $x = \sqrt{y} + 1$ est bien défini et on a bien sur $(x-1)^2 = y$. □

Exercice 1.3.1 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes. Montrer que $f \circ g$ est croissante. On suppose en outre que f et g ne prennent que des valeurs positives. Montrer que fg est croissante.*

1.3.2 Démonstration par contraposition

Ce type de démonstration s'utilise pour les assertions du type $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$. Une assertion du type $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ est vraie si et seulement si sa contraposée $\rceil\mathcal{B} \Longrightarrow \rceil\mathcal{A}$ est vraie.[1]

Pour démontrer $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$, on peut donc supposer que $\rceil\mathcal{B}$ est vraie et établir $\rceil\mathcal{A}$.

Exemple 1.3.3 *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - 5$ est injective.*

Preuve. On doit démontrer l'assertion suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \ (x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)).$$

D'après la règle 2, on commence par se donner $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ au hasard. On doit montrer l'implication suivante :

$$(x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)).$$

On montre plutot sa contraposée, qui s'écrit :

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$

On invoque ensuite la règle 1. On suppose que $f(x) = f(y)$ et on doit démontrer que $x = y$. Or $f(x) = f(y)$ implique $2x - 5 = 2y - 5$. On retranche 5 aux deux membres de l'équation et on divise par deux. Il vient $x = y$. Ceci montre bien que f est injective □

Exercice 1.3.2 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions injectives. Montrer que $f \circ g$ est injective.*

Exercice 1.3.3 *Soit p un entier naturel. Montrer que si p^2 est pair alors p est pair.*

---

[1] En effet, l'assertion $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ est équivalente à $\rceil\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ qui est lui même équivalent à $\rceil(\rceil\mathcal{B})$ ou $\mathcal{A}$. Or cette dernière assertion est exactement $\rceil\mathcal{B} \Longrightarrow \rceil\mathcal{A}$.

1.3.3 Démonstration par l'absurde

Pour démontrer une assertion $\mathcal{A}$ on peut supposer que son contraire $\rceil\mathcal{A}$ est vrai et aboutir à une contradiction.

Exercice 1.3.4 *Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.* On pourra procéder par l'absurde et supposer qu'il existe deux entiers a et b premiers entre eux tels que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

1.3.4 Démonstration par récurrence

Ce type de preuve s'utilise pour établir des assertions du type $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n$. Le schéma de la démonstration est le suivant.

Etape 1 On démontre $\mathcal{A}_n$ pour $n = 0$.

Etape 2 On se donne $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on suppose que $\mathcal{A}_n$ est vraie on démontre $\mathcal{A}_{n+1}$.

Attention, dans l'étape 2, on doit prendre un entier n quelconque. **Il est interdit de prendre une valeur particuliere pour n.**

La validité de ce type de preuves découle de la construction axiomatique des entiers naturels par le mathématicien Giuseppe Peano.

Exercice 1.3.5 *Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :*

1. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$$

2. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Chapitre 2

Notion de limite

2.1 Cas des fonctions

2.1.1 Limite en un point

Soit f une fonction et x_0, l deux réels fixés. On veut donner un sens précis à la phrase suivante :

"lorsque x devient proche de x_0, les valeurs de $f(x)$ deviennent proches de l".

Dans ce cas on dira que f tend vers l lorsque x tend vers x_0, ou encore que f a pour limite l lorsque x tend vers x_0.

Pour se faire une idée intuitive de la limite d'une fonction en un point x_0, on peut calculer des valeurs successives de $f(x)$ pour x de plus en plus proche de x_0. Ceci ne constitue en rien une démonstration.

Par exemple, si on pose $f(x) = x^2$, alors

$$f(0.1) = 0.01,\ f(0.01) = 0.0001,\ f(10^{-3}) = 10^{-6},\ etc.$$

Ceci suggère que $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. On en verra une démonstration par la suite.

Si on pose $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ pour $x > 0$, alors

$$f(1/\pi) = 0,\ f(1/(2\pi)) = 0,\ f(1/(3\pi)) = 0,\ etc.$$

On a donc des points $x_k = \frac{1}{k\pi}$ de plus en plus proches de 0 tels que $f(x_k) = 0$. Pourtant f ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0. En effet, on peut calculer f en d'autres point proches de 0 :

$$f(2/\pi) = 1,\ f(2/(5\pi)) = 1,\ f(2/(9\pi)) = 1,\ etc.$$

Il est donc nécessaire de donner une définition rigoureuse de la notion de limite. On introduit d'abord quelques notations.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fini ou infini (ex : $I = [0,1], I =]-\infty, 3], ..$). On note $\overline{I}$ la fermeture de I définie de la maniere suivante :

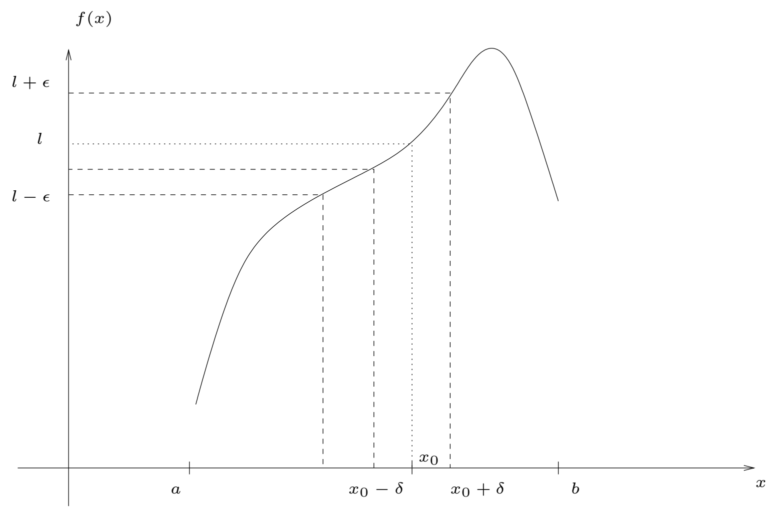
- si $I = [a,b],]a,b], [a,b[$ ou $]a,b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $\overline{I} = [a,b]$.
- si $I = [a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors $\overline{I} = [a,+\infty[$

– si $I =]-\infty, a]$ ou $]]-\infty, a[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors $\overline{I} =]-\infty, a]$.
L'intervalle $\overline{I}$ s'obtient a partir de I en fermant les crochets lorsque c'est possible.

Définition 2.1.1 *Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f a pour limite l quand x tend vers x_0 si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ tq\ \ \forall x \in I,\ (|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon) \tag{2.1}$$

Dans ce cas, on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.



Lien entre ϵ et δ

Remarque 2.1.1 *Dans la définition de la limite (2.1), il faut comprendre ϵ comme un écart maximum entre $f(x)$ et l ; et δ comme un écart entre x et x_0. La définition demande donc que l'écart (c.a.d. ϵ) entre $f(x)$ et l puisse être rendu aussi petit que voulu, pourvu que l'écart (c.a.d. δ) entre x et x_0 soit petit.*

Remarque 2.1.2 *Avec cette définition, il est clair que si $x_0 \in I$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, on a nécessairement $f(x_0) = l$. On aurait pu prendre une autre définition de la limite, excluant le comportement de f en x_0. Par exemple, on dit que "f a pour limite l quand x tend vers x_0 en étant different de x_0 si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0,\ (|x - x_0| < \delta \ et\ x \neq x_0 \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon). \tag{2.2}$$

Exemple 2.1.1 *Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in [-1, 1],\ f(x) = x^2$. Alors* $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Preuve. On doit prouver que (2.1) est vérifiée. Pour cela on se donne $\epsilon > 0$ et on cherche $\delta > 0$ tel que (2.1) soit vérifiée.

Prenons $\delta = \sqrt{\epsilon}$ et supposons que $x \in [-1, 1]$ est tel que $|x| < \delta = \sqrt{\epsilon}$. Par définition de f, on a

$$|f(x)| = x^2 < \delta^2 = \sqrt{\epsilon}^2 = \epsilon.$$

Ceci montre bien (2.1). $\square$

Exemple 2.1.2 *Soit* $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ *définie par* $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = x^2 + 1$. *Alors* $\lim_{x\to1} f(x) = 2$.

Preuve. On doit vérifier l'assertion (2.1) pour la fonction $f(x) = x^2 + 1$. Soit $\epsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ tel que $|x - 1| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 2| < \epsilon$. Or

$$\begin{aligned} &|f(x) - 2| < \epsilon \iff |x^2 - 1| < \epsilon \iff 1 - \epsilon < x^2 < 1 + \epsilon \\ &\iff \sqrt{1-\epsilon} - 1 < x - 1 < \sqrt{1+\epsilon} - 1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Prenons $\delta = \min(\sqrt{1+\epsilon} - 1, 1 - \sqrt{1-\epsilon})$. Comme $\epsilon > 0$ alors $\delta > 0$ et on a évidement $|x - 1| < \delta \Longrightarrow \sqrt{1-\epsilon} - 1 < x - 1 < \sqrt{1+\epsilon} - 1$. En tenant compte de (2.3), il vient $|x - 1| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 2| < \epsilon$.

□

Proposition 2.1.1 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une application et* $x_0 \in \overline{I}$. *On suppose que* f *a une limite en* x_0*, alors cette limite est unique.*

Preuve. Supposons par l'absurde que f possède deux limites différentes l et l' lorsque x tend vers x_0. Quitte à intervertir leurs roles, on peut supposer que $l < l'$. Posons $\epsilon = \frac{l'-l}{4} > 0$. Par définition de la limite, il existe $\delta > 0$ et $\delta' > 0$ tels que

$$\forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

et

$$\forall x \in I, |x - x_0| < \delta' \Longrightarrow |f(x) - l'| < \epsilon.$$

Soit $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \min(\delta, \delta')$. D'après les assertions ci-dessus, on a

$$f(x) < l + \epsilon \text{ et } f(x) > l' - \epsilon.$$

En particulier, $l' - \epsilon < l + \epsilon$. D'où $\epsilon > \frac{l'-l}{2}$. Or on a choisit $\epsilon = \frac{l'-l}{4}$, on en déduit une contradiction .

□

Exercice 2.1.1 *Montrer que* $\lim_{x\to0} \frac{1}{1+x} = 1$ *et que* $\lim_{x\to1}(x^2 - x - 1) = -1$

Exercice 2.1.2 *Traduire à l'aide de quantificateurs la propriété suivante : "la fonction* f *ne tend pas vers* l *quand* x *tend vers* x_0*."*

En déduire que la fonction $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ *ne tend pas vers* 0 *quand* x *tend vers* 0.

Exercice 2.1.3 *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \overline{I}$. *On suppose que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *et* $l \neq 0$. *Montrer qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I,\ f(x) \neq 0.$$

Proposition 2.1.2 (Propriétés élémentaires) *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions et* $x_0 \in \overline{I}$. *On suppose que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ *et* $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$. *On a les résultats suivants :*

i) $\lim_{x\to x_0}(f + g)(x) = l_1 + l_2$

ii) $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = l_1 l_2$

iii) Supposons que $l_2 \neq 0$*, alors la fonction* $\frac{f}{g}$ *est bien définie pour* x *proche de* x_0 *et on a* $\lim_{x\to x_0}(\frac{f}{g})(x) = \frac{l_1}{l_2}$

Preuve. **Preuve de i)** On se donne $\epsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon/2 \text{ et } |x - x_0| < \beta \Longrightarrow |g(x) - l_2| < \epsilon/2.$$

Soit $\gamma = \min(\alpha, \beta)$, alors $\gamma > 0$. Supposons que $x \in I$ vérifie $|x - x_0| < \gamma$. Alors

$$|f(x) + g(x) - (l_1 + l_2)| \leq |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \tag{2.4}$$

Ceci montre que $\lim_{x\to x_0}(f + g)(x) = l_1 + l_2$.

Preuve de ii) On se donne $\epsilon > 0$. On définit $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \min(\sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3(1+l_1)}, \frac{\epsilon}{3(1+l_1)})$. Alors, il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tels que

$$|x - x_0| < \alpha_1 \Longrightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon_1 \text{ et } |x - x_0| < \alpha_2 \Longrightarrow |g(x) - l_2| < \epsilon_2.$$

Soit $\gamma = \min(\alpha, \beta)$, alors $\gamma > 0$. Supposons que $x \in I$ vérifie $|x - x_0| < \gamma$. Alors

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - l_1 l_2| &= |g(x)(f(x) - l_1) + l_1(g(x) - l_2)| \\ &\leq |g(x) - l_2||f(x) - l_1| + |l_2||f(x) - l_1| + |l_1||g(x) - l_2| \\ &\leq \epsilon_1\epsilon_2 + l_2\epsilon_1 + l_1\epsilon_2 \leq \epsilon \end{aligned} \tag{2.5}$$

grace aux choix fait pour ϵ_1, ϵ_2.

Preuve de iii) Le fait que $\frac{f}{g}$ est bien définie près de x_0 est une conséquence de l'exercice 2.1.3. Le reste de la preuve est laissé en exercice. □

Corollaire 2.1.1 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction polynomiale (c'est à dire* $f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$*). Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Alors*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Preuve. Soit f une polynômiale. Elle peut s'ecrire $f = \sum_{k=0}^{N} f_k$ avec $f_k(x) = a_k x^k$. D'après le *i*) de la proposition 2.1.2, il suffit donc de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a bien

$$\lim_{x\to x_0} x^k = x_0^k \tag{2.6}$$

Or, on a évidemment $\lim_{x\to x_0} x = x_0$, de sorte que (2.6) est une conséquence immédiate du *ii*) de la proposition 2.1.2. □

Exemple 2.1.3 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x^2+x+1}$*. Alors* $\lim_{x\to 1} f(x) = -\frac{2}{3}$

Preuve. En effet, $\lim_{x\to 1} x^2 + x + 1 = 3$ donc (d'après iii)) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}$. Comme par ailleurs $\lim_{x\to 1} x - 2 = -1$ on obtient le résultat annoncé en ajoutant les deux limites (d'après i)). □

Proposition 2.1.3 (Composition) *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ où I et J sont deux intervalles. On suppose que $f(I) \subset J$ de sorte que $g \circ f$ est bien définie. On suppose qu'il existe $x_0 \in \overline{I}$, $y_0 \in \overline{J}$ et $l \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, $\lim_{y\to y_0} g(y) = l$. Alors $\lim_{x\to x_0}(g \circ f)(x) = l$.*

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Comme g tend vers l lorsque y tend vers y_0, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall y \in J\cap]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[,\ |g(y) - l| < \epsilon. \tag{2.7}$$

De même comme f tend vers y_0 lorsque x tend vers x_0, en appliquant la définition de la limite " avec $\epsilon = \alpha$", on peut affirmer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I\cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ |f(x) - y_0| < \alpha. \tag{2.8}$$

Autrement dit,

$$\forall x \in I\cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ f(x) \in]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[. \tag{2.9}$$

Comme $f(I) \subset J$, quel que soit $x \in I\cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on a

$$y := f(x) \in J\cap]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[.$$

Par conséquent en appliquant (2.7), on obtient $|g(y) - l| < \epsilon$. En résumé, on vient de prouver que

$$\forall x \in I\cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ |g(f(x)) - l| < \epsilon$$

ce qui achève la démonstration. □

Exemple 2.1.4 *Soit $f(x) = (x - 2)^3 - \frac{1}{1+(x-2)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{1}{2}$.*

Preuve. En effet $f(x) = g \circ h(x)$ avec $h(x) = x - 2$ et $g(y) = y^3 - \frac{1}{1+y^2}$. Or $\lim_{x\to 3} h(x) = 1$ et $\lim_{y\to 1} g(y) = \frac{1}{2}$. Le résultat découle donc de la proposition précédente. □

Proposition 2.1.4 *Soient f, g, h trois fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Soient $x_0 \in \overline{I}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que*

$$\forall x \in I,\ g(x) \le f(x) \le h(x)$$

et

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = l = \lim_{x\to x_0} h(x).$$

Alors,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l.$$

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$, alors

$$\exists \delta' > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| < \delta' \Longrightarrow l - \epsilon < g(x)).$$

Comme $\lim_{x\to x_0} h(x) = l$, alors

$$\exists \delta'' > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| < \delta'' \Longrightarrow h(x) < l + \epsilon).$$

Soit $\delta = \min(\delta', \delta'')$. Supposons que $x \in I$ vérifie $|x - x_0| < \delta$. En utilisant les deux assertions ci dessus et le fait que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, il vient

$$l - \epsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < l + \epsilon.$$

D'où $|f(x) - l| < \epsilon$. □

2.1.2 Limites infinies

On se donne $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$. On veut formaliser l'énoncé suivant : "lorsque x se rapproche de x_0 la valeur de $f(x)$ devient de plus en plus grande."

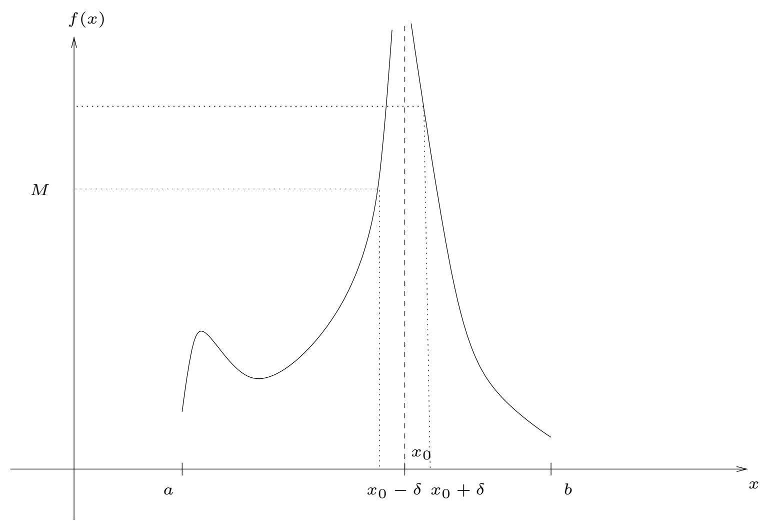
Définition 2.1.2 *On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si :*

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists \delta > 0,\ tq\ \forall x \in \overline{I},\ (|x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) \geq M) \tag{2.10}$$

Dans ce cas on note $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.
On dira que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 si :

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists \delta > 0,\ tq\ \forall x \in \overline{I},\ (|x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) \leq -M) \tag{2.11}$$

Dans ce cas on note $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.



Fonction ayant une limite infinie en un point

Remarque 2.1.3 *Dans la définition précédente, il faut comprendre M comme une valeur minimale pour $f(x)$ quand x est proche de x_0. En d'autres termes, la définition (2.10) affirme que $f(x)$ peut être rendu aussi grand que voulu (c.a.d. plus grand que M), pourvu que x soit proche de x_0 (c.a.d. $|x - x_0| < \delta$).*

Remarque 2.1.4 *Il est évident que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} (-f(x)) = +\infty.$$

Exercice 2.1.4 *Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Montrer que $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$.*

Exercice 2.1.5 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Montrer que f n'a pas de limite en 1. Comparer à l'exercice précédent.*

Définition 2.1.3 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$.*

– *On dit que f est majorée sur I si*

$$\exists M \in \mathbb{R},\, \forall x \in I,\; f(x) \leq M.$$

– *On dit que f est minorée sur I si*

$$\exists m \in \mathbb{R},\, \forall x \in I,\; f(x) \geq m.$$

– *On dit que f est bornée sur I si*

$$\exists M \geq 0,\, \forall x \in I,\; |f(x)| \leq M.$$

Remarque 2.1.5 *Une fonction est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.*

Exercice 2.1.6 *Soit f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que f n'est pas bornée sur $]-1, +\infty[$.*

Proposition 2.1.5 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $x_0 \in I$. On suppose que $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ et que g est minorée sur I alors $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty$.*

Preuve. On doit montrer que

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I,\; (|x - x_0| < \delta \Longrightarrow (f+g)(x) \geq M). \tag{2.12}$$

Soit $M \in \mathbb{R}$ quelconque. Comme g est minorée, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $g(x) \geq A$. Par ailleurs, comme $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, on sait que

$$\forall R \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I,\; (|x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) \geq R). \tag{2.13}$$

En appliquant cette propriété avec $R = M - A$, on trouve $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ on a $f(x) \geq M - A$. On en déduit que pour tout $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on a

$$(f+g)(x) \geq M - A + A = M.$$

□

2.1.3 Limites en l'infini

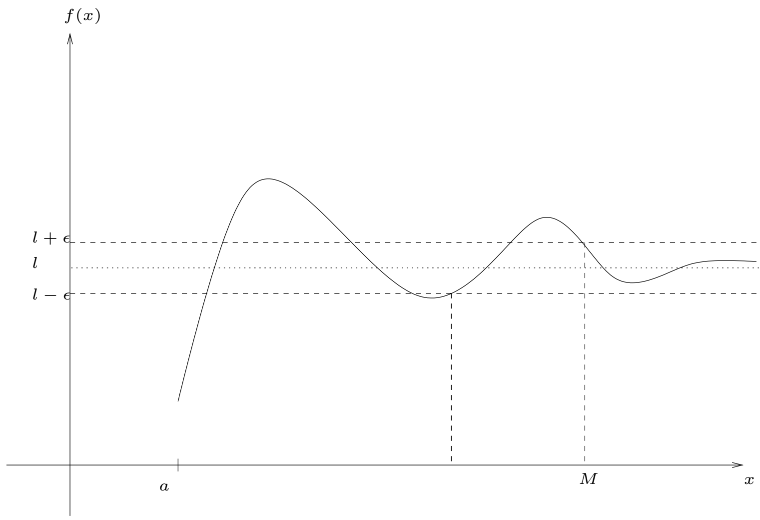
On veut formaliser la notion suivante : "lorsque x devient de plus en plus grand, $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus proches d'une valeur l fixée".

Définition 2.1.4 *Soient $a \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ et $f : (a, +\infty[\to \mathbb{R}$. On dit que f tend vers l lorsque x tend vers plus l'infini (noté $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$) si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \geq M, |f(x) - l| < \epsilon \tag{2.14}$$

On dit que f tend vers l lorsque x tend vers moins l'infini (noté $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$) si

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \leq M, |f(x) - l| < \epsilon \tag{2.15}$$



Fonction ayant une limite en plus l'infini

Remarque 2.1.6 *Dans la définition précédente, il faut comprendre M comme une valeur de x à partir de laquelle on est certain que $f(x)$ sera proche de l.*

Exercice 2.1.7 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Montrer que f tend vers 0 en $\pm\infty$.*

Exercice 2.1.8 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(-x).$$

Montrer que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = l.$$

Définition 2.1.5 *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : (a, +\infty[\to \mathbb{R}$. On dit que f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque x tend vers l'infini (noté $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, resp. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$) si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A,\ f(x) \geq M \ (\textit{resp. } f(x) \leq M) \tag{2.16}$$

Exercice 2.1.9 *Donner une bonne définition de :* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$.

Exercice 2.1.10 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x\sin(x)$. *Montrer que* f *n'est pas bornée. Montrer que* f *n'a pas de limite en l'infini.*

Proposition 2.1.6 (Propriétés élémentaires) *Soient* $f : (a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *et* $g : (a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions. On suppose que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l_1$ *et* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l_2$. *On a les résultats suivants :*

i) $\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x) = l_1 + l_2$

ii) $\lim_{x\to+\infty}(fg)(x) = l_1 l_2$

iii) Supposons que $l_2 \neq 0$, *alors la fonction* $\frac{f}{g}$ *est bien définie pour* x *assez grand et on a* $\lim_{x\to+\infty}(\frac{f}{g})(x) = \frac{l_1}{l_2}$

Preuve. C'est une variation de la preuve de la proposition 2.1.2 □

Exemple 2.1.5 *Soit* $f(x) = \frac{5x^3+x-1}{2x^3+x^2}$ *pour* $x > 0$. *Alors,* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{5}{2}$.

Preuve. En effet,

$$f(x) = \frac{x^3(5 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{x^3(2 + \frac{1}{x})} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

avec $f_1(x) = 5 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ et $f_2(x) = 2 + \frac{1}{x}$.

Or $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 5$ et $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 2$. Par suite, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{5}{2}$.
□

Proposition 2.1.7 *Soient* $f : (a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *et* $g : (a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions. On suppose que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *et que* g *est minorée. Alors*

$$\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x) = +\infty.$$

Preuve. Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme g est minorée, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in (a, +\infty[,\ g(x) \geq m.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, il existe $A \geq a$ tel que $\forall x \geq A,\ f(x) \geq M - m$. Par suite,

$$\forall x \geq A,\ (f+g)(x) \geq M - m + m = M.$$

□

Corollaire 2.1.2 *Soient* $f : (a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *et* $g : (a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions. On suppose que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. *Alors*

$$\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x) = +\infty.$$

Preuve. Il suffit de vérifier qu'une fonction tendant vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ est nécessairement minorée pour x assez grand. □

Exemple 2.1.6 *La fonction* $f(x) = x^2 + \sin(x)$ *vérifie* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque 2.1.7 *Attention, il n'y a pas de règle quand on retranche des limites infinies. Par exemple on a*

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty, \ \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty, \ \lim_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - x) = +\infty, \ \lim_{x\to+\infty} x - (x-1) = 1.$$

Proposition 2.1.8 *Soient* f, g, h *trois fonction de* $(a, +\infty[$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et soit* $l \in \mathbb{R}$. *On suppose que*

$$\forall x \in (a, +\infty[, \ g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = l = \lim_{x\to+\infty} h(x).$$

Alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$

Preuve. La démonstration est similaire à celle de la proposition 2.1.4. □

2.1.4 Passage à la limite dans les inégalités

Proposition 2.1.9 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une application. On suppose qu'il existe* $x_0 \in \overline{I}$ *et* $l \in \mathbb{R}$ *tels que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

i) Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall x \in I, f(x) \geq m$. *Alors* $l \geq m$.

ii) Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall x \in I, f(x) \leq M$. *Alors* $l \leq M$.

Preuve. **Preuve de i)** On suppose par l'absurde que $l < m$. Posons $\epsilon = \frac{m-l}{2} > 0$. Par définition de la limite, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \ |f(x) - l| < \epsilon.$$

En particulier, on a pour tout $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$,

$$f(x) < l + \epsilon = \frac{m+l}{2} < l,$$

ce qui contredit la définition de m.

Preuve de ii) Identique. Laissée en exercice. □

Remarque 2.1.8 *Il n'y a pas de théorème analogue avec des inégalités strictes. Pour s'en rendre compte, il suffit de prendre* $f(x) = x$ *pour* $x \in]0, 1[$. *On a bien* $f(x) > 0$ *pour tout* $x \in]0, 1[$ *mais* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Proposition 2.1.10 *Soit $I = (a, +\infty[$ (ou $]-\infty, b)$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$.*

- *Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, f(x) \geq m$. Alors $l \geq m$.*
- *Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, f(x) \leq M$. Alors $l \leq M$.*

Preuve. La démonstration est identique à celle de la Proposition 2.1.9. □

2.1.5 Limite à gauche et à droite

Pour illuster le propos de cette partie, commencons par l'étude d'un exemple. Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 1$ si $x < 0$ et $f(x) = x - 1$ si $x \geq 0$. Alors f n'a pas de limite lorsque x tend vers 0. En effet,pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(1/n) = -1+1/n$ et $f(-1/n) = 1-1/n$. Donc pour n grand $f(1/n)$ s'approche de -1, alors que $f(-1/n)$ s'approche de 1.

En fait il est possible démontrer que si l'on considère seulement les valeurs positives de x, alors $f(x)$ tend vers -1 quand x tend vers 0. De même, si l'on considère seulement les valeurs négatives de x, alors $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

Ceci nous pousse à introduire les définitions suivantes.

Définition 2.1.6 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $J \subset I$. On appelle restriction de f à J la fonction $f_{|J} : J \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in J,\ f_{|J}(x) = f(x).$$

Remarque 2.1.9 *La restriction de f à J n'est rien d'autre que la fonction f où l'on autorise x à ne parcourir que J.*

Exemple 2.1.7 *Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ si $x \geq 0$ et $f(x) = -x^2$ si $x \neq 0$. Soit $J = [0, 1]$, alors $f_{|[0,1]}$ est la fonction $f_{|[0,1]} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_{|[0,1]}(x) = x^2$ pour tout $x \in [0, 1]$.*

Définition 2.1.7 *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in]a, b[$. Soit $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. On dira que f tend vers l lorsque x tend vers x_0 à gauche (ou par valeurs inferieures) si $\lim_{x\to x_0} f_{|]a,x_0[}(x) = l$. Dans ce cas, on note $\lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x) = l$ (ou $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$).*

On dira f tend vers l lorsque x tend vers x_0 à droite (ou par valeurs superieures) si $\lim_{x\to x_0} f_{|]x_0,b[}(x) = l$. Dans ce cas, on note $\lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x) = l$ (ou $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$).

Remarque 2.1.10 *On peut traduire cette définition avec des ϵ. Par exemple, si $l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[,\ |f(x) - l| < \epsilon.$$

On peut faire de même avec les limites infinies.

Exemple 2.1.8 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Exemple 2.1.9 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \sin((1/x)$ *si* $x > 0$ *et* $f(x) = x\sin(1/x)$ *si* $x < 0$. *Alors*

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

mais f *n'a pas de limite en* 0 *par valeurs superieures.*

Proposition 2.1.11 *Soit* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in]a, b[$. *Alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff f(x_0) = l, \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l.$$

Preuve. Découper en morceaux. □

2.2 Cas des suites

Une suite numérique u est une application de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ valeurs dans $\mathbb{R}$. Cela peut aussi être vu comme une "collection " de nombres réels indéxée par $\mathbb{N}$. On note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle collection. Cela signifie que le premier élément de la collection est u_1, le second u_2, etc.

Définition 2.2.1 (Opérations élémentaires) *Soient* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites numériques.*

i) On définit la suite $w = u + v$ *par* $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + v_n$.

ii) On définit la suite $w = u.v$ *par* $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n.v_n$.

ii) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$. *On définit la suite* $w = \frac{u}{v}$ *par* $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

Remarque 2.2.1 *Si on sait seulement que* $v_n \neq 0$ *pour* $n \geq n_0$ *pour un certain* n_0 *(par exemple* $n_0 = 34$*), il est possible de définir la suite quotient pour des indices superieurs a* n_0.*On note cette suite* $(\frac{u_n}{v_n})_{n\geq n_0}$.

2.2.1 Limite finie

On veut donner une définition précise de la notion suivante : "les termes de la suite associés à des entiers de plus en plus grands sont de plus en plus proches d'une valeur fixe."

Définition 2.2.2 *Soient* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique et* $l \in \mathbb{R}$. *On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* l *quand* n *tend vers l'infini si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \, |u_n - l| < \epsilon \tag{2.17}$$

Dans ce cas on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exercice 2.2.1 *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* l *quand* n *tend vers l'infini dans les cas suivants :*

1. $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ *et* $l = 2$.
2. $u_n = 2 + \frac{3}{n^2}$ *et* $l = 2$.

3. $u_n = \sqrt{4+\frac{1}{n}}$ *et* $l = 2$.

Exercice 2.2.2 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergeant vers un réel* l. *On suppose que* $l \neq 0$. *Montrer qu'il existe un entier* $N \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n \geq N,\, u_n \neq 0 \tag{2.18}$$

Proposition 2.2.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergeante vers une limite* $l \in \mathbb{R}$. *Alors cette limite est unique.*

Preuve. Identique à la preuve de la proposition 2.1.1. □

Définition 2.2.3 *Soit* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique.*

- *On dit que u est majorée si*
$$\exists M \in \mathbb{R},\, \forall n \in \mathbb{N},\, u_n \leq M.$$
- *On dit que u est minorée si*
$$\exists m \in \mathbb{R},\, \forall n \in \mathbb{N},\, u_n \geq m.$$
- *On dit que u est bornée si*
$$\exists M \geq 0,\, \forall n \in \mathbb{N},\, |u_n| \leq M.$$

Exercice 2.2.3 *Montrer que toute suite ayant une limite finie est nécessairement bornée. Montrer que la réciproque est fausse.*

Proposition 2.2.2 (Propriétés élémentaires) *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites numériques. On suppose que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l_1$ *et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = l_2$. *On a les résultats suivants :*

i) $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = l_1 + l_2$

ii) $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = l_1 l_2$

ii) Si $l_2 \neq 0$ *alors* $\lim_{n\to+\infty}(\frac{u_n}{v_n}) = \frac{l_1}{l_2}$

Preuve. Copier la preuve de la proposition 2.1.6. □

Proposition 2.2.3 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \overline{I}$. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite telle que* $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \in I$. *On suppose en outre que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$. *Alors la suite* (v_n) *définie par* $v_n = f(u_n)$ *vérifie*

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = l.$$

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Par ailleurs, comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0,\ |u_n - x_0| < \delta.$$

En combinant ces deux propriétés, il vient

$$\forall n \geq n_0,\ |f(u_n) - l| < \epsilon.$$

Ceci montre bien que $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$. □

Corollaire 2.2.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim_{x\to l} f(x)$ existe. Alors $f(l) = l$.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du théorème de composition des limites et de l'unicité de la limite. □

Exercice 2.2.4 *Calculer* $\lim_{n\to+\infty}(2 + 5/n)^2$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{3n+2}}$.

Proposition 2.2.4 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites numériques et soit $l \in \mathbb{R}$. On suppose que qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \geq n_0,\ v_n \leq u_n \leq w_n$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = l = \lim_{n\to+\infty} w_n.$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

Preuve. La démonstration est similaire à celle de la proposition 2.1.4. □

2.2.2 Limite infinie

Définition 2.2.4 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers plus l'infini quand n tend vers l'infini (noté $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$) si*

$$\forall M \geq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ u_n \geq M.$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers moins l'infini quand n tend vers l'infini (noté $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$) si

$$\forall M \geq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ u_n \leq -M.$$

Exercice 2.2.5 *Montrer que u_n tend vers plus l'infini dans les cas suivants :*

$$u_n = n^3 + 1,\ \ u_n = n^2 - n,\ \ u_n = \frac{n^2 - 1}{n + 2},\ \ u_n = n + \cos(n).$$

Proposition 2.2.5 (Propriétés élémentaires) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. On a les résultats suivants :*

i) Si v_n est minorée alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$.

ii) $\lim_{n\to+\infty}(-u_n) = -\infty$

iii) Pour tout $\lambda > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = +\infty$.

iv) $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{u_n}) = 0$

v) Si $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{v_n}) = +\infty$

Preuve. **Preuve de i)** Elle est très proche de la preuve de la proposition 2.1.7. Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme (v_n) est minorée, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geq m.$$

Par ailleurs, comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N,\ u_n \geq M - m.$$

En combinant ces deux propriétés, il vient

$$\forall n \geq N,\ u_n + v_n \geq M - m + m = M.$$

Comme on a choisi M arbitrairement, ceci prouve bien que $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = +\infty$.

Preuve de ii) C'est évident.

Preuve de iii) Soit $\lambda > 0$ et fixons $M \in \mathbb{R}_+$ arbitrairement. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N,\ u_n \geq \frac{M}{\lambda}.$$

Comme $\lambda > 0$ on peut multiplier cette inégalité par λ sans changer le sens des inégalités. Par conséquent,

$$\forall n \geq N,\ \lambda u_n \geq \lambda \frac{M}{\lambda} = M.$$

Comme on a choisi M arbitrairement, ceci prouve bien que $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = +\infty$.
□

2.2.3 Monotonie et limite

Définition 2.2.5 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, (p \leq q \Longrightarrow u_p \leq u_q).$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, (p \leq q \Longrightarrow u_p \geq u_q).$$

Remarque 2.2.2 *La définition ci dessus est une simple écriture que la suite (u_n) vue comme une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction croissante (ou décroissante).*

Proposition 2.2.6 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On a les resultats suivants :*

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ssi*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n.$$

2. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ssi*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n.$$

Preuve. Un sens de l'équivalence est trivial. Une simple réccurence permet de montrer l'autre sens. □

Exemple 2.2.1 *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2$ est croissante. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{n+1}$ est décroissante.*

Théorème 2.2.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite quand n tend vers l'infini.*

De même, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante et minorée. Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite quand n tend vers l'infini.

Preuve. (hors programme) Considérons l'ensemble

$$U = \{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est une sous partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Donc elle possède une borne superieure. Soit $l = \sup U$. Montrons que (u_n) tend vers l.

Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $u_{n_0} > l - \epsilon$. Or, (u_n) étant croissante, on a $u_n \geq u_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$. Par suite,

$$\forall n \geq n_0, u_n \geq l - \epsilon.$$

Par ailleurs, par définition de l, on a $u_n \leq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\forall n \geq n_0, |u_n - l| < \epsilon,$$

ce qui achève la démonstration. □

Exercice 2.2.6 *Soit $b > 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = b^n$. Montrer que (u_n) est croissante et tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.*

Exercice 2.2.7 *Soient $a > 1$ et $k \in \mathbb{N}$ fixés et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{a^n}{n^k}$.*

1. *Montrer qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{a+1}{2}$.*
2. *En déduire que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}(\frac{a+1}{2})^{n-n_0}$*
3. *Déduire de l'exercice précédent que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*

2.2.4 Critère de Cauchy

Définition 2.2.6 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la suite (u_n) vérifie le critère de Cauchy (ou encore "(u_n) est de Cauchy") si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathbb{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \forall m \geq N,\ |u_n - u_m| < \epsilon.$$

Proposition 2.2.7 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On suppose que (u_n) possède une limite. Alors (u_n) est de Cauchy.*

Preuve. Soit $l \in \mathbb{R}$ la limite de la suite. Donnons nous $\epsilon > 0$ arbitraire. Comme (u_n) converge vers l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N,\ |u_n - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq N$ et $m \geq N$. Alors

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - l| + |u_m - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ceci montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien de Cauchy. □

Théorème 2.2.2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On suppose que (u_n) est de Cauchy. Alors, (u_n) possède une limite.*

Preuve. Admis. □

Remarque 2.2.3 *Le théorème précédent est très puissant. En effet, contrairement à la définition de la convergence, le critère de Cauchy peut se formuler sans connaitre la limite éventuelle de la suite considérée. Ainsi, on pourra montrer qu'une suite est convergeante sans connaitre exactement la valeur de sa limite.*

Chapitre 3

Continuité et dérivabilité des fonctions numériques

Dans ce chapitre on reprend les notations précédentes.

3.1 Rappels sur les fonctions

3.1.1 Injectivité, surjectivité

Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

Définition 3.1.1 *On dit que f est injective si*

$$\forall x \in X \forall x' \in X,\ (f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x').$$

On dit que f est surjective si

$$\forall y \in Y, \exists x \in X,\ f(x) = y.$$

On dit que f est bijective si elle est Ã la fois injective et surjective.

Proposition 3.1.1 *Une application $f : X \to Y$ est injective ssi*

$$\forall x \in X,\ \forall x' \in X,\ (x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')).$$

Preuve. Les deux formulations sont équivalents car l'une est la contraposée de l'autre. □

Dans toute la suite, on notera $Id_X : X \to X$ l'application identité sur X (i.e. $Id_X(x) = x,\ \forall x \in X$) et $Id_Y : Y \to Y$ l'application identité sur Y. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité sur l'ensemble X, on otera Id à la place de Id_X.

Proposition 3.1.2 *Soit $f : X \to Y$ une application bijective, alors il existe une unique application $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = Id_X$ et $f \circ g = Id_Y$. Cette application s'appelle l'application réciproque de f et se note f^{-1}.*

Preuve. Commençons par définir $f^{-1} : Y \to X$. Etant donné $y \in Y$, la fonction f étant surjective, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. De plus, f étant injective, cet élément x est unique (si x et x' vérifient $f(x) = y$ et $f(x') = y$ alors $f(x) = f(x')$, donc $x = x'$). On pose

$$f^{-1}(y) = x.$$

On a alors

$$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

ce qui prouve $f \circ f^{-1} = Id_Y$.

Par ailleurs,

$$f(f^{-1}(f(x))) = f(x),\ \forall x \in X.$$

Comme f est injective, on en déduit que $f^{-1}(f(x)) = x$, ce qui montre que $f^{-1} \circ f = Id_X$. □

3.1.2 Monotonie

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to J$.

Définition 3.1.2 *On dit f est croissante si*

$$\forall x, y \in I,\ (x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)).$$

On dit f est strictement croissante si

$$\forall x, y \in I,\ (x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)).$$

On dit f est décroissante si

$$\forall x, y \in I,\ (x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)).$$

On dit f est strictement croissante si

$$\forall x, y \in I,\ (x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)).$$

On dit que f est monotone si elle est croissante ou bien décroissante. On dit que f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou bien strictement décroissante.

Exemple 3.1.1 *L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ est croissante, mais elle n'est pas strictement croissante.*

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est strictement croissante.

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est ni croissante, ni décroissante.

Proposition 3.1.3 *Soit $I \to J$ une application strictement monotone. Alors f est injective.*

Preuve. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f est strictement croissante. Soient $x, y \in I$ tels que $x \neq y$. On peut supposer que $x < y$. Comme f est strictement croissante, alors $f(x) < f(y)$. Donc $f(x) \neq f(y)$. □

3.2 Continuité

3.2.1 Propriétés élémentaires

Définition 3.2.1 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Remarque 3.2.1 *En reprenant les définitions du chapitre précédent, il est facile de voir que f est continue en x_0 si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Exemple 3.2.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors f est continue en 1.*

Proposition 3.2.1 (Propriétés élémentaires) *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$. On suppose que f et g sont continues en x_0. On a les résultats suivants :*

i) *$f + g$ est continue en x_0.*

ii) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est continue en x_0.*

iii) *$f.g$ est continue en x_0*

iv) *Supposons que $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est bien définie pour x proche de x_0 . De plus elle est continue en x_0.*

Preuve. Par hypothèse on a :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ et } \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$$

et on doit montrer que

$$\lim_{x\to x_0} (f + g)(x) = f(x_0) + g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} (fg)(x) = f(x_0)g(x_0).$$

Toutes ces identités sont des conséquences immédiates de la Proposition 2.1.2. □

Définition 3.2.2 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I si pour tout $x_0 \in I$, f est continue en x_0.*

Les fonctions continues sont très nombreuses. Un exemple simple et fondamental de fonctions continues est donné par les fonctions polynomiales. Une fonction polynomiale est une fonction de la forme $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_N x^N$, où N est un entier fixé (le degré du polynome) et $a_0, \ldots, a_N$ sont des réels.

Proposition 3.2.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale. Alors f est continue sur I.*

Preuve. Commencons par traiter le cas particulier suivant. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $f_k : I \to \mathbb{R}$ par $f_k(x) = x^k$.

Si $k = 0$, $f_0(x) = 1$ pour tout $x \in I$. Par conséquent on a bien $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1 = f(x_0)$ quel que soit $x_0 \in I$.

Si $k = 1$, $f_1(x) = x$ pour tout $x \in I$. Etant donné $x_0 \in I$ et $\epsilon > 0$, on a $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \epsilon$ dés que $|x - x_0| < \epsilon$. Ceci montre que f_1 est continue.

Pour traiter le cas général, on fixe $k \in \mathbb{N}$ et on constate que $f_k(x) = f_1(x).f_1(x) \ldots f_1(x)$. En appliquant la propriété iii) de la proposition 3.2.1, il est clair que chaque fonction f_k est continue sur I.

Traitons maintenant le cas général. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale. Il existe des constantes $a_0, \ldots, a_N$, telles que

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k.$$

Par suite $f = \sum_{k=0}^{N} a_k f_k$. En appliquant le i) et le ii) de la proposition 3.2.1, on obtient le fait que f est coninue.

□

Exemple 3.2.2 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = x$ si $x \geq 0$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, f est définie par une expression polynomiale. Donc elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Il reste à montrer que f est continue en 0. Soit $\epsilon > 0$. Posons $\delta = \epsilon$ et supposons $|x - 0| < \delta$. Alors

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x|$$

car $f(x) = x$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$. Comme $|x| < \delta = \epsilon$, on en déduit $|f(x) - f(0)| < \epsilon$, ce qui prouve la continuité de f en 0. □

Proposition 3.2.3 *Soient I, J, K trois intervalles et $f : I \to J$ et $g : J \to K$ deux applications continues. Alors, $g \circ f$ est continue.*

Preuve. Soit $x_0 \in I$. On doit montrer que $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g \circ f(x_0)$. Or, f et g étant continue, on a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ et } \lim_{y \to f(x_0)} g(y) = g \circ f(x_0).$$

Il découle donc de la Proposition 2.1.3 que $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g \circ f(x_0)$. □

3.2.2 Théorème de la valeur intermédiaire

Théorème 3.2.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application coninue. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$ et soit $y \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(a) \leq y \leq f(b)$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.*

Preuve. La preuve consiste à implementer la méthode dite de la dichotomie.

Quitte à considerer la fonction $x \mapsto f(x) - y$, on peut supposer $y = 0$. On a donc $f(a) < 0 < f(b)$ et on cherche $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

On va construire par récurrence deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$(a_n) \text{ est croissante et } f(a_n) \leq 0 \tag{3.1}$$

$$(b_n) \text{ est décroissante et } f(b_n) \geq 0 \tag{3.2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n \text{ et } b_n - a_n \leq (b-a)2^{-n} \tag{3.3}$$

On commence par poser $a_0 = a$ et $b_0 = b$. On définit a_1 et b_1 de la manière suivante. On calcule $z = f(\frac{a+b}{2})$.

Si $z = 0$, on pose $a_1 = b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$.

Si $z > 0$, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$.

Si $z < 0$, on pose $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$.

On remarque qu'on a bien $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$ dans tous les cas. De plus, par construction on $b_1 - a_1 = 0$ si $z = 0$ et $b_1 - a_1 = \frac{b_0-a_0}{2}$ si $z \neq 0$.

Supposons maintenant que $a_0, \dots, a_n$ et $b_0, \dots, b_n$ satisfaisant (3.1), (3.2) et (3.3) ont été construits. On va définir a_{n+1} et b_{n+1} de manière suivante. Soit $z = f(\frac{a_n+b_n}{2})$.

Si $z = 0$, on pose $a_{n+1} = b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

Si $z > 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

Si $z < 0$, on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

On vérifie alors que a_{n+1} et b_{n+1} satisont les propriétés (3.1), (3.2) et (3.3).

Nous allons maintenant montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune. Pour cela il suffit de remarquer que (a_n) est croissant et majorée par b_0, donc elle converge vers une limite $\ell_a \in \mathbb{R}$. De même, (b_n) est décroissante et minorée par a_0, donc elle converge vers une limite $\ell_b \in \mathbb{R}$.

De plus, $a_n - b_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (car $0 < b_n - a_n < (b-a)2^{-n}$). Par suite, $\ell_0 = \ell_b$.

On pose $c = \ell_a = \ell_b$.

Comme f est continue, on a $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$. Comme $f(a_n) \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f(c) \leq 0$.

De même, $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c)$ et comme $f(b_n) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f(c) \geq 0$.

On en déduit donc que $f(c) = 0$.

□

Remarque 3.2.2 *Le résultat précédent est faux si la fonction n'est pas continue. Par exemple, pour* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 0$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(x) = 1$ *si* $x > 0$*, il n'existe pas de* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(c) = \frac{1}{2}$.

Proposition 3.2.4 *Soit* $I = [a, b]$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une application continue et strictement monotone sur* I*. Alors* f *est bijective de* I *sur* $[f(a), f(b)]$.

Preuve. La stricte monotonie de f montre que f est injective. Pour montrer que f est surjective, on peut supposer que f est strictement croissante.

On se donne $y \in [f(a), f(b)]$. Le théorème de la valeur intermédiaire montre qu'il exiset $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$. Par suite f est bien surjective. □

3.2.3 Notion d'extremum

Dans cette partie les fonctions considérées ne sont pas nécessairement continues.

Définition 3.2.3 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f a un maximum global sur I si :*

$$\exists x_0 \in I,\ \forall x \in I,\ f(x) \leq f(x_0).$$

Dans ce cas, le nombre $f(x_0)$ est appelé maximum de f sur I et noté $\max_{x\in I} f(x)$.

On dit que f a un minimum global sur I si :

$$\exists x_0 \in I,\ \forall x \in I,\ f(x) \geq f(x_0).$$

Dans ce cas, le nombre $f(x_0)$ est appelé minimum de f sur I et noté $\min_{x\in I} f(x)$.

Remarque 3.2.3 *Si f a un maximum, sa valeur M est unique. Par contre le point x_0 où cette valeur est atteinte n'est pas unique. Par exemple, sur $\mathbb{R}$ la fonction $\sin(x)$ admet 1 pour maximum, qui est atteint en $\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$.*

On appelle *extremum* un maximum ou un minimum.

Définition 3.2.4 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application et soit $x_0 \in I$. On dit que f a un maximum local en x_0 si :*

$$\exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ f(x) \leq f(x_0).$$

Le nombre $M = f(x_0)$ est le maximum local de f en x_0.

Si de plus, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$ on a $f(x) < f(x_0)$, on dit que M est un maximum local strict de f en x_0.

On dit que f a un minimum local en x_0 si :

$$\exists \delta > 0, \forall x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ f(x) \geq f(x_0).$$

Le nombre $m = f(x_0)$ est le minimum local de f en x_0.

Si de plus, pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$ on a $f(x) > f(x_0)$, on dit que m est un minimum local strict de f en x_0.

Exemple 3.2.3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors f a un minimum local en $x = 0$.*

Exemple 3.2.4 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^4 - 2x^2$. Alors f a un maximum local en $x = 0$ et un minimum local(en fait global) en $x = 1$ et $x = -1$.*

Remarque 3.2.4 *Tout extremum local est nécessairement un extremum local, mais la réciproque est fausse (cf exemple ci dessus).*

3.2.4 Résultats globaux

Théorème 3.2.2 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une application continue. Alors* f *possède un maximum global et un minimum global. De plus, il existe* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *tels que*

$$f(x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } f(x_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Preuve. **Admis** □

La conclusion du théorème devient fausse si l'on ne suppose plus que f est continue ou si on remplace $[a, b]$ par $]a, b]$. Pour voir que l'hypothèse de continuité est nécessaire, considerer $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors f n'a pas d'extremum global.

Pour voir qu'il est nécessaire que l'intervalle soit fermé et borné, prendre $f : x \in [0, +\infty[\mapsto x$. Alors f n'a pas de maximum global puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On peu aussi prendre $f : x \in]0, 1] \mapsto \frac{-1}{x^2}$ et constater que f n'a pas de minimum global.

Définition 3.2.5 *Soit* I *un intervalle et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une application. On dit que* f *est uniformément continue sur* I *si la propriété suivante est satisfaite :*

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in I, \forall y \in I,\ (|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon) \tag{3.4}$$

Comparons les definitions de "f est continue sur I" :

$$\forall x \in I,\ \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall y \in I,\ (|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon) \tag{3.5}$$

et "f est uniformément continue sur I" :

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in I, \forall y \in I,\ (|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon). \tag{3.6}$$

On remarque qu'on passe de la continuité à l'uniforme continuité en intervertissant les blocs "$\forall x \in I$" et "$\exists\delta > 0$". Autrement dit dans l'uniforme continuité on demande que le δ ne dépende pas du point x où l'on mesure la continuité.

Remarque 3.2.5 *Toute application uniformément continue sur* I *est nécessairement continue sur* I*. Par contre il existe des applications continues sur un intervalle qui ne sont pas uniformément continues.*

Exemple 3.2.5 *L'application* $f(x) = \frac{1}{x}$ *est continue sur* $]0, 1]$ *mais elle n'est pas uniformément continue. Pour le voir, il suffit de vérifier la négation de l'uniforme continuité :*

$$\exists\epsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x \in I, \exists y \in I \text{ tq } |x - y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

Fixons $\epsilon = 1$ *et prenons* $\delta > 0$ *au hasard. On cherche* x *et* y *dans* $]0, 1]$ *tels que* $|x - y| < \delta$ *et* $|f(x) - f(y)| \geq 1$*. Prenons* $x = \frac{\delta}{2(\delta+1)}$ *et* $y = \frac{\delta}{4(\delta+1)}$*. Alors* $|x - y| = \frac{\delta}{4(\delta+1)} < \delta$*. De plus*

$$|f(x) - f(y)| = \frac{2(\delta + 1)}{\delta} = 2 + \frac{1}{\delta} \geq 1 = \epsilon.$$

Théorème 3.2.3 *Soit* $I = [a, b]$ *un intervalle fermé et borné. Alors, toute fonction* f *continue sur* I *est aussi uniformément continue sur* I*.*

Preuve. **Admis.** □

3.3 Dérivabilité

3.3.1 Définition et propriétés élémentaires

Dans cette partie on suppose que I est un intervalle ouvert, c'est à dire ne contenant pas ses bornes.

Définition 3.3.1 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si la limite suivant existe*

$$\lim_{x \to x_0,\, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si f est dérivable en x_0, on note $f'(x_0)$ la limite précédente.

Définition 3.3.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable sur I si pour tout $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0.*

Exemple 3.3.1 *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mais elle n'est pas dérivable en 0. En effet,*

$$\lim_{x \to 0, x<0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0, x<0} \frac{-x}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 0, x>0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0, x>0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Par suite la quantité $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Proposition 3.3.1 (Propriétés élémentaires) *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$. On suppose que f et g sont dérivables en x_0. On a les résultats suivants :*

i) $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

iii) $f.g$ est dérivable en x_0 et $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

iv) Supposons que $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est bien définie pour x proche de x_0 . De plus elle est dérivable en x_0 et $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Preuve. Les points i) et ii) sont des conséquences immédiates de la proposition 2.1.2.

Preuve de iii) Pour $h > 0$, on note

$$\Delta_h(f) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

On a

$$\Delta_h(fg) = \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = g(x_0 + h)\Delta_h(f) + f(x_0)\Delta_h(g) \tag{3.7}$$

De plus on a $\lim_{h\to 0} \Delta_h(f) = f'(x_0)$, $\lim_{h\to 0} \Delta_h(g) = g'(x_0)$ et $\lim_{h\to 0} g(x_0 + h) = g(x_0)$. En appliquant à nouveau la proposition 2.1.2, on obtient

$$\lim_{h\to 0} \Delta_h(fg) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

Preuve de iv) En tenant compte de iii), on peut supposer que f est constante égale à 1. De plus,

$$\Delta_h(\frac{1}{g}) = \frac{1}{h}(\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}) = \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)}\frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{h}.$$

En utilisant à nouveau la proposition 2.1.2, on obtient

$$\lim_{h\to 0} \Delta_h(\frac{1}{g}) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

ce qui prouve iv) dans le cas $f = 1$. □

Proposition 3.3.2 (Dérivation d'une composée) *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$. On note $y_0 = g(x_0)$. On suppose que $y_0 \in I$ et que g est dérivable en x_0 et f est érivable en y_0. Alors $f \circ g$ est dérivable en x_0 et*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)).g'(x_0).$$

Preuve. On reprend les notations de la preuve précédente. On

$$\begin{aligned}\Delta_h(f\circ g) &= \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(y_0+k(h)) - f(y_0)}{k(h)}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \Delta_{k(h)}(f)\Delta_h(g)\end{aligned} \tag{3.8}$$

avec $y_0 = g(x_0)$ et $k(h) = g(x_0+h) - g(x_0)$. Comme $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$, on peut appliquer les propositions 2.1.2 et 2.1.3 pour obtenir

$$\lim_{h\to 0} \Delta_h(f\circ g) = f'(g(x_0)).g'(x_0). \tag{3.9}$$

□

Exemple 3.3.2 *La fonction $f(x) = \exp(x^2+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2x\exp(x^2+1)$.*

Proposition 3.3.3 *Soient I et J deux intervalles et $f : I \to J$ une application dérivable et bijective. Supposons que $y \in J$ vérifie $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. Alors l'application réciproque $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en y et*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Preuve. Pour $y' \in J$ on écrit

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y')}{y-y'} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y')}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y'))}$$

On pose $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$, alors

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y')}{y-y'} = \frac{x-x'}{f(x)-f(x')}$$

Or, f étant continue, f^{-1} est aussi continue (c.f. TD). Donc, lorsque y' tend vers y, $x' = f^{-1}(y')$ tend vers $f^{-1}(y) = x$. Par suite

$$\lim_{y' \to y} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y')}{y - y'} = \lim_{x' \to x} \frac{x - x'}{f(x) - f(x')} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

□

Exemple 3.3.3 *Soit $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to]-1, 1[$, définie par $f(x) = \sin(x)$. Alors f est bijective et*

$$\forall x \in]-1, 1[,\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En effet, on a $f' = cos$. Par suite, la proposition précédente montre que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{cos(arcsin(x))}.$$

Or pour $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $cos(y) = \sqrt{1 - \sin(y)^2}$. En prenant $y = \arcsin(x)$ il vient $cos(arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$. D'où le résultat annoncé.

Remarque 3.3.1 *On a des résultats analogues pour les fonctions* cos *et* tan.

3.3.2 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Proposition 3.3.4 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une application dérivable. On suppose qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que f a un extremum local en c. Alors $f'(c) = 0$.*

Preuve. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f a un maximum local en c. Comme $c \in]a, b[$, il existe $\delta > 0$ tel que $I_\delta :=]c - \delta, c + \delta[\subset]a, b[$. Pour $x \neq c$, on pose $D(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Alors $f'(c) = \lim_{x \to c} D(x)$.

Par ailleurs, c étant un maximum loca ; quitte à diminuer δ, on peut supposer que pour tout $x \in I_\delta$, $f(x) - f(c) \leq 0$. Par suite, pour tout $x \in I_\delta$ on a

$$D(x) \geq 0 \text{ si } x < c$$

et

$$D(x) \leq 0 \text{ si } x > c$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = c - \frac{\delta}{n}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $D(u_n) \geq 0$ et comme u_n tend vers c, on a aussi $\lim_{n \to +\infty} D(u_n) = f'(c)$. Par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit $f'(c) \geq 0$.

De la même maniere, en considérant $v_n = c + \frac{\delta}{n}$ on obtient $f'(c) \leq 0$.

On a donc $0 \leq f'(c) \leq 0$. Ceci achève la preuve. □

Remarque 3.3.2 *Pour pouvoir appliquer le résultat précédent, il est impératif que le point c où f a un extremum local ne soit pas une borne de l'intervalle de définition. Par exemple, la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ a un minimum global en 0. Pourtant $f'(0) = 1$.*

Théorème 3.3.1 (Théorème de Rolle) *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a < b$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une application continue et dérivable sur* $]a, b[$. *On suppose que* $f(a) = f(b)$. *Alors, il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Preuve. Si f est la fonction constante égale à $f(a)$, on a $f'(x) = 0$ pour tout x et il n'y a rien à démontrer.

Supposons que f n'est pas constante. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) > f(a)$. Par ailleurs, d'après le Théorème 3.2.2, il existe $x_1 \in [a, b]$ tel que $f(x_1) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$. Comme $f(x_0) > f(a) = f(b)$, alors $x_1 \notin \{a, b\}$. Autrement dit, $x_1 \in]a, b[$ et on peut appliquer la Proposition 3.3.4 pour en déduire que $f'(x_1) = 0$. □

Théorème 3.3.2 (Théorème des accroissements finis) *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a < b$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une application continue et dérivable sur* $]a, b[$. *Alors, il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Preuve. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Alors, g est continue sur a, b et dérivable sur $]a, b[$. De plus un simple calcul montre que $g(a) = f(a) = g(b)$. Par conséquent on peut appliquer le Théorème de Rolle à g et en déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or, un simple calcul montre que

$$\forall x \in]a, b[, g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On déduit des deux dernieres inégalités , le résultat annoncé. □

Corollaire 3.3.1 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a < b$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une application continue et dérivable sur* $]a, b[$. *On suppose qu'il existe* $M \geq 0$ *tel que*

$$\forall x \in]a, b[,\ |f'(x)| \leq M.$$

Alors,

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Corollaire 3.3.2 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une application continue et dérivable sur* $]a, b[$.

Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in]a, b[$, *alors* f *est croissante sur* $[a, b]$.

Si $f'(x) > 0, \forall x \in]a, b[$, *alors* f *est strictement croissante sur* $[a, b]$.

3.3.3 Représentation graphique

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable en un point $x_0 \in I$. On note $G_f = \{(x, f(x)), x \in I\}$ le graphe de f.

Définition 3.3.3 *On appelle tangente au graphe* G_f *en* x_0, *la droite d'équation Cartésienne* $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. *On notera* T_{f,x_0} *cette droite.*

Remarque 3.3.3 *Le graphe* G_f *et la tangente* T_{f,x_0} *se coupent au point* $(x_0, f(x_0))$. *De plus pour* x *proche de* x_0 *ces deux graphes sont très proches.*

3.3.4 Dérivées d'ordre superieur

Définition 3.3.4 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est dérivable k fois (ou de classe D^k) si f est dérivable et f' est de classe D^{k-1}. Dans ce cas on note*

$$f'' = (f')',\ f^{(3)} = ((f')')',\ \ldots, f^{(k)} = (f^{(k-1)})'.$$

On notera $\mathcal{D}^k(I)$ l'ensemble des applications de classe D^k sur I.

On peut alors définir les applications de classe C^k.

Définition 3.3.5 *Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^k si f est de classe D^k et $f^{(k)}$ est continue. On notera $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des applications de classe C^k sur I.*

Remarque 3.3.4 *Pour $k \in \mathbb{N}$, on a les inclusions suivantes :*

$$\mathcal{C}^k(I) \subset \mathcal{D}^{k+1}(I) \subset \mathcal{C}^{k+1}(I)$$

De plus ces deux inclusions sont strictes.

3.4 Rappels sur les fonctions usuelles

Dans cette section on rapelle des résultats admis sur des fonctions usuelles (exponentielle, sinus, cosinus, etc.)

3.4.1 La fonction exponentielle

Théorème 3.4.1 *Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) \text{ et } f(0) = 1.$$

Cette fonction s'appelle l'exponentielle et se note $f(x) = \exp(x)$

Preuve. **Admis** □

La fonction exponentielle a les propriétés suivantes :

Proposition 3.4.1 *i)* $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$

ii) $\exp$ *est strictement croissante.*

iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.

iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(n) = e^n$ *où* $e = \exp(1) > 1$.

v) $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

Preuve. **i)** admis

ii) C'est évident puisque $exp' = exp > 0$ d'après i).

iii) Fixons y et considérons $g(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$. On a $g(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1$ et $g'(x) = g(x)$ pour tout x. Par conséquent, le résultat d'unicité du Théorème 3.4.1, montre que $g(x) = \exp(x)$ pour tout x. En multipliant par $\exp(y)$ on obtient l'identité annoncée.

iv) Le fait que $e > 1$ est une conséquence immédiate de ii). Pour montrer que $\exp(n) = e^n$ on procède par récurrence.

Pour $n = 0$, on a bien $\exp(0) = 1 = e^0$.

Supposons $\exp(n) = e^n$. Alors, en utilisantr iii) et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\exp(n+1) = \exp(n)\exp(1) = e^n.e = e^{n+1},$$

ce qui prouve l'identité.

v) Soit $M \geq 0$. D'après l'exercice 2.2.6, la suite $u_n = e^n$ vérifie $\lim_{n\to+\infty u_n} = +\infty$. Par conséquent, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, e^n \geq M.$$

Or, la fonction exponentielle étant croissante, ceci implique que

$$\forall x \geq n_0,\ \exp(x) \geq M.$$

Autrement dit, on a bien $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

Pour montrer que $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$, il suffit de remarquer que $\exp(x)\exp(-x) = 1$ et d'utiliser le résultat précédent. □

Corollaire 3.4.1 *La fonction* exp *est bijective de* $\mathbb{R}$ *sur* $]0, +\infty[$.

On note $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sa fonction réciproque (appelé logarithme). On a les propriétés suivantes :

Proposition 3.4.2 *i)* $\ln(e) = 1$

ii) ln *est strictement croissante.*

iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$.

iv) $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to0} \ln(x) = -\infty$.

v) La fonction ln *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Preuve. Il suffit d'utiliser la Proposition 3.4.1 et les résultats sur les fonctions réciproques. □

A l'aide des fonctions exponentielle et logarithme, on peut définir les puissances non-entieres d'un réel positif.

Définition 3.4.1 *Soit* $a \in \mathbb{R}$.*On définit la fonction* $f_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *par* $f_a(x) = \exp(a\log(x))$.

Proposition 3.4.3 *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *Alors la fonction* f_a *est de classe* C^∞. *Si deplus* $a \in \mathbb{N}$ *alors* $f_a(x) = x^a$. *On notera donc par la suite* $f_a(x) = x^a$, *même lorsque* $a \notin \mathbb{N}$.

Preuve. La fonction f_a est de classe C^∞ comme composée de fonction C^∞. Pour $a \in \mathbb{N}$, on a $f_a(x) = \exp(a\log(x)) = \exp(\log(x^a)) = x^a$. □

Proposition 3.4.4 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $x, y > 0$. *Alors*

1. $(xy)^a = x^a y^a$
2. $x^a x^b = x^{a+b}$
3. $(x^a)^b = x^{ab}$

4. $\frac{1}{x^a} = x^{-a}$

Preuve. Exercice facile. □

Proposition 3.4.5 Croissance comparée *Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, on a lmes limites suivantes :*

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$ *et* $\lim_{x \to -\infty} x^k e^{-x} = 0$.
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0$ *et* $\lim_{x \to 0} x^k \ln(x) = 0$.

Preuve. Exercice. Indic : traiter d'abord le cas $k = 1$ et étudier les fonctions $\frac{e^x}{x}$ (on remarquera que $e^x \geq x$ pour $x \geq 0$). □

3.4.2 Les fonctions trigonométriques

Dans cette partie on rappelle les propriétés élémetaires des fonctions sinus et cosinus, qui sont définies de manière géométrique. Etant donné un angle $x \in]0, 2\pi[$, les nombres $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont calculés en construisant un triangle rectangle (ABC) de cotés AB et AC de longueur 1 et d'angle $\hat{A}$ égal à x. On pose alors

$$\sin(x) = \frac{BC}{AC} \text{ et } \cos(x) = \frac{AB}{AC}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en posant $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ quelque soit $k \in \mathbb{N}$. Les fonctions ainsi définies sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ pèriodiques. Elles vérifient les identités suivantes :

$$\sin(x+y)\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y), \quad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x), \ \cos(-x) = \cos(x),$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x), \ \cos(\pi - x) = -\cos(x), \ \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$$

$$\sin'(x) = \cos(x), \ \cos'(x) = -\sin(x).$$

On peut aussi définir la fonction tangeante sur $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}\}$ par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

C'est une fonction C^∞ et on a

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}.$$

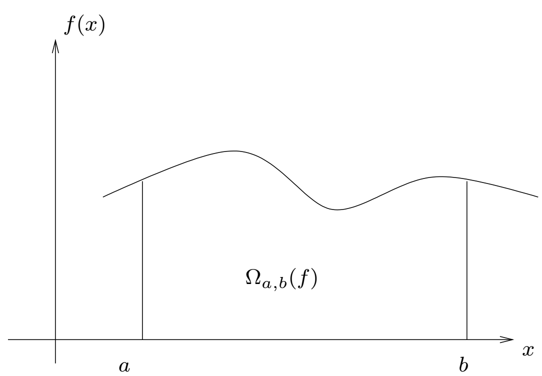
Chapitre 4

Intégration des fonctions continues morceaux

4.1 Introduction

Dans cette section, on fixe $a < b$ deux réels, on note $I = [a, b]$ et on considère $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose en outre que f est positive sur $[a, b]$, c'est à dire que $\forall x \in [a, b],\ f(x) \geq 0$. On veut calculer l'aire de la région du plan comprise entre le graphe de f, l'axe des abcisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Autrement dit, on veut calculer l'aire de l'ensemble

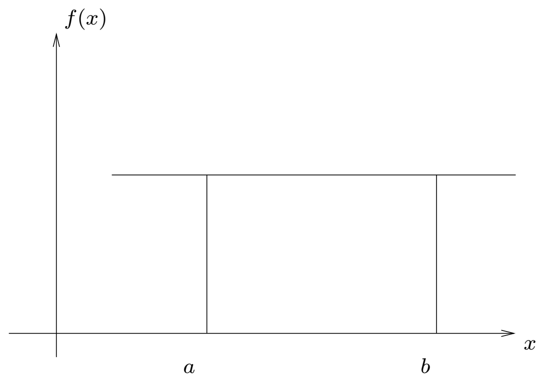
$$\Omega_{a,b}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$



Domaine dont on veut calculer l'aire

Dans quelques cas particuliers, il est possible de faire ce calcul simplement.

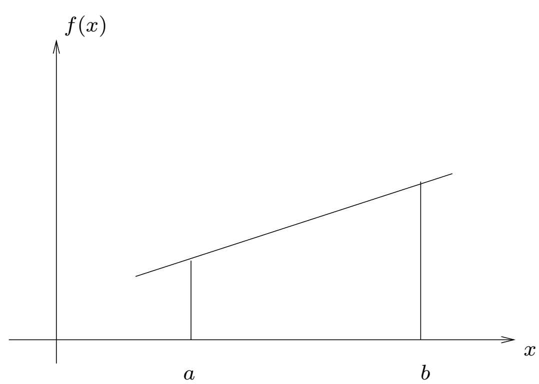
Par exemple, si f est la fonction constante $f(x) = c$ pour un certain $c \geq 0$. Le domaine $\Omega_{a,b}(f)$ est un rectangle dont les cotés sont de longueurs respectives c et $b - a$. Donc, son aire vaut $c(b - a)$.



Cas d'une fonction constante

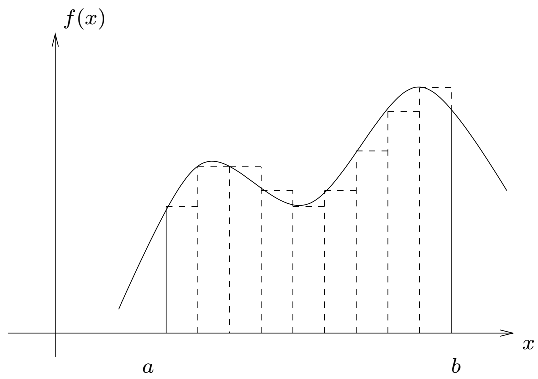
Si f est la fonction linéaire, $f(x) = c + d(x-a)$, pour deux constantes $c \geq 0$ et $d \geq 0$. Le domaine $\Omega_{a,b}(f)$ est un trapèze de petite base c, de grande base $c + d(b-a)$ et de hauteur $b-a$. Son aire vaut donc

$$\frac{1}{2}(\text{petite base} + \text{grande base}) * \text{hauteur} = (c + \frac{d}{2}(b-a))(b-a).$$



Cas d'une fonction linéaire

Si f est une fonction plus compliquée. Par exemple, $f(x) = (x-a)^2$. Il n'y a pas de manière élémentaire de calculer. Une première approche consiste à essayer de calculer l'aire de manière approchée en découpant le domaine en petits morceaux en remplacant chaque petit morceau par un morceau “proche” dont on sait calculer l'aire (par exemple un rectangle ou un trapèze !).



Approximation par découpage en petits rectangles

Si on prend des morceaux de plus en plus petits, on "s'appercoit" que les approximations successives convergent vers une valeur limite.

4.2 Définition de l'intégrale

4.2.1 Cas des fonctions en escalier

Définition 4.2.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est une fonction en escalier s'il existe une subdivision de $[a,b]$ $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{N+1} = b$ et des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ tels que pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$ on ait*

$$\forall x \in]a_k, a_{k+1}[, \; f(x) = \alpha_k.$$

Remarque 4.2.1 *Dans la définition précédente , on demande juste que f soit constante sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$.*

Définition 4.2.2 *Soit f une fonction en escalier. Soit $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{N+1} = b$ une subdivision de $[a,b]$ telle que f est constante égale à α_k sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$. On définit l'intégrale entre a et b de f par*

$$\int_a^b f(x)dx := \sum_{k=1}^{N} \alpha_k (a_{k+1} - a_k).$$

Proposition 4.2.1 *Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f+g$ et λf sont aussi des fonctions en escalier et on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx. \tag{4.1}$$

et

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \tag{4.2}$$

Preuve. Soient f et λ comme ci dessus. Il existe une subdivision $a = a_1 < \ldots < a_{N+1}$ et des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ tels que

$$\forall x \in]a_k, a_{k+1}[, \; f(x) = \alpha_k.$$

Par suite,

$$\forall x \in]a_k, a_{k+1}[,\ (\lambda f)(x) = \beta_k$$

avec $\beta = \lambda\alpha_k$. Par définition de l'intégrale, il vient

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f)(x)dx &= \sum_{k=1}^{N} \beta_k(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{N} \lambda\alpha_k(a_{k+1} - a_k) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(a_{k+1} - a_k) = \lambda \int_a^b f(x)dx\end{aligned} \tag{4.3}$$

Ceci prouve (4.12). La preuve de (4.13) est un peu plus délicate et laissée en exercice.

□

Proposition 4.2.2 *Soient $a < b < c$ trois réels et f une fonction en escalier sur $[a, c]$. Alors $f_{|[a,b]}$ et $f_{|[b,c]}$ sont aussi des fonctions en escalier et*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate du fait que pour tout $N, M \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=1}^{N+M} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{M+N} a_k.$$

□

4.2.2 Cas des fonction continues par morceaux

Supposons pour commencer que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue. On lui associe des fonctions en escalier de manière naturelle comme à la figure précédente en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} \alpha_k^n 1_{[}a_k^n, a_{k+1}^n[,$$

avec $a_k^n = a + (k-1)\frac{b-a}{2^n}$ et $\alpha_k^n = f(a_k^n)$.

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$; f_n est une fonction en escalier. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n(f) \in \mathbb{R}$ par

$$I_n(f) = \int_a^b f_n(x)dx.$$

Théorème 4.2.1 *Soit f une fonction continue. Soit $(I_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels construite ci-dessus. Alors la suite $(I_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie lorsque n tend vers l'infini. Cette limite est appelée intégrale de f entre a et b et notée $\int_a^b f(x)dx$.*

Preuve. Pour montrer que la suite $(I_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite quand n tend vers l'infini, il suffit de montrer que cette suite est de Cauchy (c.f. Th 2.2.2).

Prenons $\epsilon > 0$ quelconque. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Longrightarrow |I_n(f) - I_{n+m}(f)| < \epsilon). \tag{4.4}$$

Or, la fonction f est continue sur $[a, b]$ qui est un intervalle fermé et borné, donc elle est uniformément continue, d'après le Théorème 3.2.3. Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b],\ (|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}) \tag{4.5}$$

Prenons $N \in \mathbb{N}$ tel que $(b-a)2^{-N} \leq \delta$ (c'est possible car la suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0) et supposons que $n, m \in \mathbb{N}$ vérifient $n \geq N$. On va montrer que (4.4) est vérifiée.

Par définition, on a

$$I_n(f) = \frac{b-a}{2^n}\sum_{j=1}^{2^n} f(a + \frac{j-1}{2^n}(b-a)) = \frac{b-a}{2^n}\sum_{j=1}^{2^n}\frac{1}{2^m}\sum_{k=1}^{2^m} f(a + \frac{j-1}{2^n}(b-a)) \tag{4.6}$$

et

$$\begin{aligned} I_{n+m}(f) &= \frac{b-a}{2^{n+m}}\sum_{i=1}^{2^{n+m}} f(a + \frac{i-1}{2^{n+m}}(b-a)) \\ &= \frac{b-a}{2^n}\sum_{j=1}^{2^n}\frac{1}{2^m}\sum_{k=1}^{2^m} f(a + \frac{j-1}{2^n}(b-a) + \frac{k-1}{2^{n+m}}(b-a)) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Par suite,

$$|I_n(f) - I_{n+m}(f)| \leq \frac{b-a}{2^{n+m}}\sum_{j=1}^{2^n}\sum_{k=1}^{2^m}|f(x_{j,k}) - f(y_{j,k})| \tag{4.8}$$

avec $x_{j,k} = a + \frac{j-1}{2^n}(b-a)$ et $y_{j,k} = a + \frac{j-1}{2^n}(b-a) + \frac{k-1}{2^{n+m}}(b-a)$. En particulier, pour tout $1 \leq j \leq 2^n$ et $1 \leq k \leq 2^m$, on a

$$|x_{j,k} - y_{j,k}| = \frac{k-1}{2^{n+m}}(b-a) \leq \frac{b-a}{2^n} \leq \delta \tag{4.9}$$

car $n \geq N$. Par conséquent, en combinant (4.5) et (4.9), on obtient

$$|f(x_{j,k}) - f(y_{j,k})| \leq \frac{\epsilon}{b-a} \tag{4.10}$$

En utilisant cette inégalité dans (4.8), il vient

$$|I_n(f) - I_{n+m}(f)| \leq \frac{b-a}{2^{n+m}}\sum_{j=1}^{2^n}\sum_{k=1}^{2^m}\frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon. \tag{4.11}$$

Ceci prouve (4.4) et achève la démonstration. □

Remarque 4.2.2 *Dans le théorème précédent, on démontre que la suite $(I_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite sans expliciter celle-ci. Pour la plus part des fonctions la limite de $I_n(f)$ (c'est à dire l'intégrale de f) est incalculable explicitement. Par contre, le théorème précédent montre que cette intégrale est bien définie (ici le critère de Cauchy est fondamental) et donne même un algorithme pour en calculer une approximation. En effet, en prenant n de plus en plus grand, le nombre $I_n(f)$ (qui est facilement calculable) s'approche de plus en plus de l'intégrale de f.*

On va maintenant définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux. Pour cela, on a besoin de la notion de prolongement par continuitÃ© d'une fonction.

Définition 4.2.3 *Soit $f\ :]a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\lim_{x\to a,x>a} f(x)$ existe et $\lim_{x\to b,x<b} f(x)$ existe. On appelle prolongement par continuité de f à l'intervalle $[a,b]$ la fonction $\tilde{f}$ définie sur $[a,b]$ par*

$$\forall x\in]a,b[; \tilde{f}(x)=f(x)$$

et $\tilde{f}(a)=\lim_{x\to a,x>a} f(x)$, $\tilde{f}(b)=\lim_{x\to b,x<b} f(x)$.

Remarque 4.2.3 *La fonction $\tilde{f}$ ci dessus est continue sur $[a,b]$, par définition.*

Exemple 4.2.1 *Soit $f\ :]0,1]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x\sin(\frac{1}{x})$. Alors, la fonction $\tilde{f}$ défine par $\tilde{f}(0)=0$ et $\tilde{f}(x)=f(x)$, $\forall x>0$, est le prolongement par continuité de f a $[0,1]$.*

Définition 4.2.4 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a=a_1<\ldots<a_{N+1}=b$ telle que $f_]a_k,a_{k+1}[$ est continue pour tout k et f a une limite a gauche et à droite en a_k.*

Définition 4.2.5 *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. On définit l'intégrale de f entre a et b par*

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\tilde{f}_{|]a_k,a_{k+1}[}(x)dx,$$

où $\tilde{f}_{|]a_k,a_{k+1}[}$ est le prolongement par continuité de $f_{|]a_k,a_{k+1}[}$ à l'intervalle $[a_k,a_{k+1}]$.

Proposition 4.2.3 *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors $f+g$ et λf sont aussi des fonctions continues par morceaux et on a*

$$\int_a^b f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx. \tag{4.12}$$

et

$$\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx. \tag{4.13}$$

Preuve. Par définition, on peut supposer que f et g sont continues. Il suffit alors de remarquer que

$$I_n(f+g)=I_n(f)+I_n(g)$$

et

$$I_n(\lambda f) = \lambda I_n(f).$$

En passant à la limite ($n \to \infty$) dans les égalités ci dessus, on obtient le résultat annoncé.

□

Définition 4.2.6 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On définit l'intégrale entre b et a de f (attention aux bornes!!) par*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Proposition 4.2.4 *Soit I un intervalle et a, b, c trois réels appartenant à I. Soit f une fonction continue par morceaux sur I. Alors*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Preuve. **Admis** □

On s'interesse maintenant aux propriétés de conservation du signe de l'intégrale.

Proposition 4.2.5 *Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que la suite I_n définissant l'intégrale est positive. Donc sa limite est positive. □

Corollaire 4.2.1 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que $f \leq g$ sur $[a, b]$. Alors,*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Preuve. Appliquer la proposition précédente à $g - f$. □

Corollaire 4.2.2 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Preuve. Comme f est continue sur $[a, b]$, il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que $f(x_1) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $f(x_2) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Autrement dit, pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

En intégrant ces inégalités entre a et b, on obtient

$$(b-a)f(x_1) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f(x_2).$$

En divisant par $(b-a)$ on voit que le nombre $I = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ vérifie $I \in [f(x_1), f(x_2)]$. Le théorème de la valeur intermédiaire montre donc qu'il existe $c \in [x_1, x_2]$ tel que $I = f(c)$. D'où le résultat annoncé. □

4.3 Théorème fondamental de l'Analyse

Théorème 4.3.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et $x_0 \in [a,b]$. Pour $x \in [a,b]$ on définit*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Alors, F est de classe C^1 sur $[a,b]$, $F(x_0) = 0$ et

$$\forall x \in [a,b],\ F'(x) = f(x).$$

Preuve. Le fait que $F(x_0) = 0$ est évident.

Montrons que F est dérivable. Fixons $x \in [a,b]$. Pour $h > 0$, grace à la relation de Chasles, on a

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - f(x) \tag{4.14}$$

De plus, d'après le corollaire 4.2.2, il existe $x_h \in [x, x+h]$ tel que $\int_x^{x+h} f(t)dt = hf(x+h)$. Par suite,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) = f(x_h) - f(x). \tag{4.15}$$

Comme x_h tend vers x lorsque h tend vers 0, on en déduit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

Ceci montre que F est dérivable et que $F' = f$. Comme f est continue , on a automatiquement $F \in C^1$. □

Définition 4.3.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Une fonction F dérivable q et telle que $F' = f$ s'appelle une primitive de f.*

Remarque 4.3.1 *Le théorème précédent affirme que toute fonction coninue possède une primitive. Il est facile de voir qu'étant donnée une primitive F de f, quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $F + \lambda$ est aussi une primitive de F. Réciproquement, si F et G sont deux primitives de f, alors $G = F + \lambda$ pour une certaine constante λ.*

Théorème 4.3.2 *Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Preuve. Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f'(t)dt$. D'après le théorème 4.3.1, on a $F(a) = 0$ et

$$\forall x \in]a,b[,\ F'(x) = f'(x).$$

Par suite $F - f$ est constante égale à $-f(a)$. En prenant $x = b$, il vient $F(b) = f(b) - f(a)$, c'est à dire

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

$\square$

Proposition 4.3.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et F une primitive de f. Alors*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Preuve. Soit F une primitive de f. D'après le corollaire, on a

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a).$$

Or $F' = f$. Donc

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

$\square$

4.4 Intégration par parties

Théorème 4.4.1 *Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $]a,b[$ et coninues sur $[a,b]$. On a alors la formule suivante :*

$$\int_a^b u'(x)v(x) = [uv]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx \tag{4.16}$$

où l'on utilise la notation $[f]_a^b = f(b) - f(a)$.

Preuve. D'après le théorème 4.3.2, on a

$$\begin{aligned}[uv]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)dx &= \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.\end{aligned} \tag{4.17}$$

$\square$

Exemple 4.4.1 *On a*

$$\int_0^2 te^t dt = e^2 + 1$$

En effet, une intégration par partie montre que

$$\int_0^2 te^t dt = [te^t]_0^2 - \int_0^2 e^t dt = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1.$$

4.5 Changement de variable

Théorème 4.5.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue et soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ une application de classe C^1. Alors*

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)ds.$$

Preuve. Soit F une primitive de f. Alors $F \circ \varphi$ est dérivable et

$$(F \circ \varphi)' = F' \circ \varphi.\varphi'.$$

Par conséquent la fonction $G = F \circ \varphi$ est une primitive de $(F' \circ \varphi)\varphi'$. En appliquant le théorème 4.3.2, on obtient

$$\int_\alpha^\beta (F' \circ \varphi)(t).\varphi'(t)dt = G(b) - G(a) = F(\varphi(a)) - F(\varphi(b)).$$

Or F étant une primitive de f, ceci entraine

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t).\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)ds.$$

□

Exemple 4.5.1 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$.

Preuve. Notons $I = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$. On pose $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ et $\varphi(t) = \tan(t)$. Alors, $\varphi(-\frac{\pi}{4}) = -1$, $\varphi(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$. Par suite

$$I = \int_{\varphi(-\frac{\pi}{4})}^{\varphi(\frac{\pi}{3})} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(\tan(t)) \tan'(t)dt$$

Or $\tan'(t) = 1 + \tan^2(t)$, donc $f(\tan(t)) \tan'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(t)}} = \cos(t)$. Par suite

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(t)dt = [\sin]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}.$$

□

Chapitre 5

Formule de Taylor, développements limités

5.1 Ordre de grandeur

5.1.1 Généralités

Dans cette partie on veut formaliser l'observation suivante. Considérons les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. On sait que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

Cependant, on peut se demander laquelle de ces deux fonctions tend le plus vite vers 0 quand x tend vers 0. On peut commencer par évaluer f et g pour des valeurs "petites" :

x	0.1	0.01	10^{-3}
$f(x)$	0.1	0.01	10^{-3}
$g(x)$	0.01	0.0001	10^{-6}

On constate que lorsque x tend vers 0, $g(x)$ *est beaucoup plus petit que* $f(x)$.

Une autre manière d'appréhender ce phénomene est de calculer la limite quand x tend vers 0 de $\frac{g(x)}{f(x)}$. On constate que

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

Ceci confirme que lorsque x s'approche de 0 le quotient $\frac{g(x)}{f(x)}$ devient très petit. Autrement dit, $g(x)$ *est beaucoup plus petit que* $f(x)$.

Définition 5.1.1 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in \overline{I}$. On dira que "f est un grand O de g lorsque x tend vers x_0" si :*

$$\exists C \geq 0, \exists \delta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I,\ |f(x)| \leq C|g(x)|.$$

On notera

$$f(x) = \mathcal{O}_{x_0}(g(x)).$$

Exemple 5.1.1 *Soit* $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{x} + x - 2$. *Alors* $f(x) = \mathcal{O}_1((x-1)^2)$.

Définition 5.1.2 *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions et* $x_0 \in \overline{I}$. *On dira que "f est un petit o de g lorsque x tend vers x_0" si il existe* $\delta > 0$ *et une fonction* $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ *telle que* $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$ *et*

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I, \; |f(x)| = \epsilon(x)|g(x)|$$

On notera

$$f(x) = o_{x_0}(g(x)).$$

Exemple 5.1.2 *Soit* $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. *Alors* $f(x) = o_0(x)$.

Remarque 5.1.1 *Avec les notations précédentes, dire que* $f = o_{x_0}(1)$ *(où* 1 *désigne la fonction constante égale à* 1*) signifie exactement que* $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Proposition 5.1.1 *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions et* $x_0 \in \overline{I}$. *Alors* $f(x) = o_{x_0}(g(x))$ *si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \; \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I, \; |f(x)| < \epsilon |g(x)|.$$

Preuve. Il suffit d'écrire la définition de $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$ pour obtenir l'équivalence. □

Corollaire 5.1.1 *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions et* $x_0 \in \overline{I}$. *Supposons* $f(x) = o_{x_0}(g(x))$, *alors* $f(x) = O_{x_0}(g(x))$.

Proposition 5.1.2 *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$, $h : I \to \mathbb{R}$ *et* $k : I \to \mathbb{R}$ *quatre fonctions* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in I$. *on a les implications suivantes :*

1. *Si* $f = o_{x_0}(g)$ *et* $h = o_{x_0}(g)$ *alors* $f + h = o_{x_0}(g)$.
2. *Si* $f = o_{x_0}(g)$ *et* $h = \mathcal{O}_{x_0}(k)$ *alors* $f.h = o_{x_0}(g.k)$.
3. *Si* $f = \mathcal{O}_{x_0}(g)$ *et* $h = \mathcal{O}_{x_0}(g)$ *alors* $f + h = \mathcal{O}_{x_0}(g)$.
4. *Si* $f = \mathcal{O}_{x_0}(g)$ *et* $h = \mathcal{O}_{x_0}(k)$ *alors* $f.h = \mathcal{O}_{x_0}(g.k)$.

Preuve. Laissée en exercice. □

Remarque 5.1.2 *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ *et* $h : I \to \mathbb{R}$ *trois fonctions et* x_0, x_1 *deux réels. Si* $x_0 \neq x_1$, *aucune des règles précédentes ne s'applique. Par exemple on a* $x^2 = o_0(x)$, $\frac{1}{x} = \mathcal{O}_1(x)$ *et* $x^2.\frac{1}{x} = x \neq o_0(x^2)$.

5.1.2 Cas des puissances

Dans cette partie, on compare la taille des fonctions puissances. On fixe un intervalle I et $x_0 \in I$ et pour $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 5.1.3 *Soient* $k \in \mathbb{N}$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$, *alors*

1. $f = o_{x_0}((x - x_0)^k)$ *ssi* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = 0$.
2. $f = \mathcal{O}_{x_0}((x - x_0)^k)$ *ssi* $\frac{f(x)}{(x-x_0)^k}$ *est bornée "près de* x_0*".*

Preuve. C'est une conséquence immédiate des définitions. □

5.2 Formule de Taylor

Dans toute cette partie $I =]a,b[$ est un intervalle, $x_0 \in I$ est fixé et $f : I \to \mathbb{R}$ est une application.

Théorème 5.2.1 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Supposons que $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, alors pour tout $x \in I$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R(x)$$

avec

$$R(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Preuve. On procède par récurrence sur n.

Le cas $n = 0$ est une conséquence immédiate du Théorème fondamental de l'Analyse.

Supposons que $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I)$ et qu'on a établi la formule :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt. \tag{5.1}$$

Une simple intégration par parties montre que

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt &= -[\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}dt\end{aligned} \tag{5.2}$$

En additionnant les equations (5.1) et (5.2), on obtient le résultat au rang $n+2$.
□

Corollaire 5.2.1 (Formule de Taylor-Lagrange) *Supposons que $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, alors pour tout $x \in I$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \mathcal{O}_{x_0}((x-x_0)^{n+1})$$

Preuve. Il suffit de majorer le reste $R(x)$ dans la formule de Taylor avec reste intégral. Comme f est de classe C^{n+1}, pour tout $\delta > 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],\ |f^{(n+1)}(t)| \leq C.$$

Par suite, pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, on a

$$|R(x)| \leq C|\int_{x_0}^{x} \frac{|x-t|^n}{n!}dt| \leq C|x-x_0|^{n+1}.$$

□

En fait on peut améliorer ce résultats à bien des égards :

Théorème 5.2.2 (Formule de Taylor-Young) *Supposons que $f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable, alors pour tout $x \in I$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R(x)$$

avec

$$R(x) = o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

Preuve. Etant donnée une fonction f dérivable n fois, on définit la fonction

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

On doit donc montrer que $T_n f(x) - f(x) = o_{x_0}((x - x_0)^n)$. On procède par réccurence sur n.

Pour $n = 1$, il s'agit de montrer que si f est dérivable sur I alors

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - f(x) = o_{x_0}(x - x_0).$$

En divisant par $x - x_0$ l'équation précédente devient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o_{x_0}(1)$$

qui est trivialement vraie par définition de la limite.

Supposons maitenant la propriété vraie au rang n. Soit f une fonction $n + 1$ fois dérivable sur I. Par conséquent, la fonction f' est n fois dérivable e td'aprs̀ l'hypoths̀e de réccurence on sait que

$$T_n f'(t) - f'(t) = o_{x_0}((t - x_0)^n).$$

On intègre cette égalité entre x_0 et x :

$$\int_{x_0}^{x} T_n f'(t)dt - f(x) + f(x_0) = \int_{x_0}^{x} o_{x_0}((t - x_0)^n)dt.$$

Par ailleurs on constate que

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} T_n f'(t)dt &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\end{aligned}$$

et

$$\int_{x_0}^{x} o_{x_0}((t - x_0)^n)dt = o_{x_0}((x - x_0)^{n+1}).$$

On en déduit,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k - f(x) + f(x_0) = o_{x_0}((x - x_0)^{n+1})$$

c'est à dire

$$T_{n+1} f(x) - f(x) = o_{x_0}((x - x_0)^{n+1}).$$

□

Remarque 5.2.1 *Si l'on compare ce résultat avec la formule de Taylor-Lagrange au rang n, on constate que la conclusion est meilleure (on a $R(x) = o_{x_0}((x - x_0)^n)$ à comparer avec $R(x) = O_{x_0}((x - x_0)^n)$ dans le cas Taylor-Lagrange) et nécessite moins d'hypothèses ($f \in \mathcal{D}^n$ contre $f \in \mathcal{C}^n$).*

5.3 Développements limités

Dans cette partie on introduit les développements limités. Etant donnée une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ réguliere et $x_0 \in I$, on veut donner une approximation de f par une fonction plus simple. Une classe de fonction bien connue est la classe des polynomes. Il est donc interresant d'approcher une fonction par des polynomes.

Dans un premier temps, on peut essayer d'approcher f par un polynome de degré 0, c'est à dire par une constante. C'est possible en choisissant comme polynome approximant la fonction $P_0(x) = f(x_0)$. Si f est continue on voit que $\lim_{x\to x_0}(P_0 - f)(x) = 0$. Autrement dit, lorsque x s'approche de x_0, les fonctions P_0 et f sont proches.

Si on veut raffiner cette approximation, on peut chercher à approcher f par un polynome P_1 de degré 1, c'est à dire par une fonction linéaire. Si la fonction f est dérivable, ceci est possible (ca consiste à dire que la tangeant approche le graphe de la fonction) et fourni une meilleure approximation que l'approximation par une constante.

Pour aller plus loin, on peut essayer d'approcher f par un polynome de degré n quelconque. C'est l'objet de la suite du paragraphe.

Définition 5.3.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in \overline{I}$. On dit que f a un développement limité à l'ordre n en x_0 ($DL_n(x_0)$) s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) \tag{5.3}$$

pour $x \in I$. Si une fonction f a un $DL_n(x_0)$ pour tout n, on dit que la fonction f a un développement limité a tout ordre en x_0.

Proposition 5.3.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in \overline{I}$. On suppose que f a un $DL_n(x_0)$. Alors les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ sont uniques.*

Preuve. Supposons qu'on a deux suites de coefficients $a_0, \ldots, a_n$ et $b_0, \ldots, b_n$. Montons que $a_k = b_k$ pour tout k. On procède par réccurence sur k.

Pour $k = 0$, on remarque que

$$a_0 = \lim_{x\to x_0} f(x) = b_0.$$

Supposons que $a_0 = b_0, \ldots, a_k = b_k$, en soustrayant les deux DL de f en x_0, on obtient

$$0 = (a_{k+1} - b_{k+1})(x - x_0)^{k+1} + \ldots + (a_n - b_n)(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

En divisant par $(x - x_0)^{k+1}$ et en faisant $x \to x_0$, on obtient $a_{k+1} = b_{k+1}$. □

Proposition 5.3.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application, $x_0 \in \overline{I}$ et $g(x) = f(x_0 + x)$. Alors, f a un $DL_n(x_0)$ si et seulement si g a un $DL_n(0)$. De plus les coefficients de ces deux DL sont identiques.*

Preuve. Exercice. □

Théorème 5.3.1 *Soit f une fonction de classe C^n sur I. Alors, pour tout $x_0 \in I$, f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) \quad (5.4)$$

Preuve. C'est une conséquence du théorème 5.1. □

Remarque 5.3.1 *Si on a plus d'information sur f, on peut pousser le DL un peu plus loin.*

Proposition 5.3.3 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux applications et $x_0 \in \overline{I}$. On suppose que f et g ont un $DL_n(x_0)$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) \\ g(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Alors

i) **(Somme de DL)** *La fonction $f + g$ a un $DL_n(x_0)$:*

$$(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + \ldots + (a_n + b_n)(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

ii) **(Produit de DL)** *La fonction fg a un $DL_n(x_0)$:*

$$\begin{aligned} (fg)(x) = a_0b_0 &+ (a_1b_0 + a_0b_1)(x - x_0) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)(x - x_0)^2 \\ &+ \ldots + (a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \ldots + a_0b_n)(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) \end{aligned} \quad (5.6)$$

iii) **(Inverse de DL)***Si $f(x_0) = 0$ et f possède un $DL_n(x_0)$, alors $\frac{1}{1-f}$ possède un $DL_n(x_0)$. Ce DL_n est identique à celui de la fonction $\sum_{k=0}^{n} f^k$ qui se calcule avec les regles i) et ii).*

iv) **(Composition de DL)** *Soient I et J deux intervalles et $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On se donne $x_0 \in I$ et on suppose que $y_0 = f(x_0)$ appartient à J. On suppose aussi que f a un $DL_n(x_0)$ et g a un $DL_n(y_0)$ et que ces DL sont donnés par*

$$f(x) = P_n(x - x_0) + o_{x_0}((x - x_0)^n) \text{ et } g(y) = Q_n(y - y_0) + o_{y_0}((y - y_0)^n).$$

Alors $g \circ f$ a un $DL_n(x_0)$ qui s'obtient en calculant le $DL_n(x_0)$ de $Q_n(P_n(x - x_0) - y_0)$.

Preuve. Le i) est trivial. Il suffit de remarquer que $o_{x_0}((x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n = o_{x_0}((x - x_0)^n$.

Pour le ii), on écrit $f(x) = P(x) + r(x)$ et $g(x) = Q(x) + s(x)$ avec

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n \text{ et } r(x) = o_{x_0}((x - x_0)^n$$

$$Q(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)^n \text{ et } s(x) = o_{x_0}((x - x_0)^n$$

On a
$$(fg)(x) = P(x)Q(x) + P(x)r(x) + Q(x)s(x).$$
D'après la Proposition **??**, on a $P(x)r(x) + Q(x)s(x) = o_{x_0}((x-x_0)^n$. De plus, en regroupant les puissances, on voit facilemnt que

$$\begin{aligned}P(x)Q(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)(x-x_0) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)(x-x_0)^2 \\ + \ldots + (a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \ldots + a_0b_n)(x-x_0)^n + (x-x_0)^{n+1}W(x)\end{aligned} \tag{5.7}$$

où W est un polynôme. En particulier, $(x-x_0)^{n+1}W(x) = o_{x_0}((x-x_0)^n$, ce qui achève la démonstration de ii).

Démontrons maintenant le iii). On définit $g_n(x) = \sum_{k=0}^n f^k(x)$. Un calcul immédiat montre que

$$(1 - f(x))g_n(x) = 1 - f^{n+1}(x), \tag{5.8}$$

d'où
$$\frac{1}{1-f(x)} = g_n(x) + \frac{f^{n+1}(x)}{1-f(x)} \tag{5.9}$$

De plus, on a supposé que $f(x) = o_{x_0}(x-x_0)$. Par conséquent, $f^{n+1}(x) = o_{x_0}((x-x_0))^{n+1}$ et $\frac{1}{1-f(x)} = O_{x_0}(1)$. On en déduit que

$$\frac{1}{1-f(x)} = g_n(x) + o_{x_0}((x-x_0)^{n+1}) \tag{5.10}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que grace aux points i) et ii), la fonction g_n a un $DL_n(x_0)$; $g_n(x) = P_n(x-x_0) + o_{x_0}((x-x_0))^n$. En remplacant g_n par cette expression dans (5.11), il vient

$$\frac{1}{1-f(x)} = P_n(x-x_0) + o_{x_0}((x-x_0)^n). \tag{5.11}$$

Ceci démontre à la fois l'existence d'un DL pour $\frac{1}{1-f}$ et la manière de le calculer.

La preuve iv) est laissée au lecteur. □

Remarque 5.3.2 *Le point iii) sert à calculer le développement limité de $\frac{1}{g}$ pour toute fonction g ne s'annulant pas en x_0 et ayant un DL. En effet si $g(x_0) \neq 0$, on peut ecrire*
$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(x_0)}\frac{1}{1-f(x)} \tag{5.12}$$
avec $f(x) = \frac{g(x_0)-g(x)}{g(x_0)}$. Comme g possède un DL, il est clair que f satisfait les hypothèses du iii) de la proposition précédente.

Exemple 5.3.1 *Soit $u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = \frac{1}{x}$ et soit $x_0 > 0$. Alors f possède un DL à tout ordre en x_0. En effet*

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{1}{x_0}\frac{1}{1-(\frac{x_0-x}{x_0})} = \frac{1}{x_0}\sum_{k=0}^n (x_0-x)^k + O_{x_0}((x-x_0)^{n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{x_0}(x-x_0)^k + o_{x_0}((x-x_0)^n).\end{aligned} \tag{5.13}$$

Proposition 5.3.4 (Intégration des DL) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et $x_0 \in \overline{I}$. On suppose que f a un $DL_n(x_0)$:*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n) \tag{5.14}$$

Alors, toute primitive F de f a un développement limité à l'ordre $n+1$ en x_0 :

$$F(x) = F(x_0)+a_0(x-x_0)+\frac{a_1}{2}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{a_n}{(n+1)}(x-x_0)^{n+1}+o_{x_0}((x-x_0)^{n+1}).$$

Preuve. Soit F une primitive de f. Alors, il existe une fonction r telle que $\lim_{x\to x_0} r(x) = 0$ et

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)dt \\ &= F(x_0) + \int_{x_0}^{x} (\sum_{k=0}^{n} a_k(t - x_0)^k + (t - x_0)^n r(t))dt \end{aligned} \tag{5.15}$$

En utilisant le fait que $\int_{x_0}^{x}(t - x_0)^k dt = \frac{1}{k+1}(x - x_0)^{k+1}$ et la linéarité de l'intégrale, il vient

$$F(x) = F(x_0)+a_0(x-x_0)+\frac{a_1}{2}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{a_n}{(n+1)}(x-x_0)^{n+1}+\rho(x) \tag{5.16}$$

avec $\rho(x) = \int_{x_0}^{x}(t-x_0)^n\epsilon(t)dt$. Il reste donc à montrer que $\rho(x)$ tend vers 0 plus vite que $(x - x_0)^{n+1}$. Fixons $\epsilon > 0$ au hasard. Par définition, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ |r(t)| < \epsilon(t - x_0)^n.$$

On en déduit que pour $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on a

$$|\rho(x)| < \epsilon \int_{x_0}^{x} |t - x_0|^n dt \leq \epsilon|x - x_0|^{n+1} \tag{5.17}$$

ce qui montre que $\rho(x) = o_{x_0}((x - x_0)^{n+1}$. $\square$

Remarque 5.3.3 *On remarque que le DL à l'ordre $n + 1$ de la primitive de f s'obtient en intégrant termes à termes le DL de f à l'ordre n.*

Remarque 5.3.4 *Il n'y a pas de résultat analogue qui permette d'affirmer que si une fonction dérivable a un DL_n alors sa dérivée f' a un DL_{n-1}. Par exemple la fonction f définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x^2})$ possède une DL_2 en 0 :*

$$f(x) = 0 + 0.x + 0x^2 + o_0(x^2),$$

mais sa dérivée n'a pas de DL_1 en 0. En effet, $f'(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = 3x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) - 2\cos(\frac{1}{x^2}).$$

En particulier f' n'es pas continue en 0 et donc ne possède pas de DL_1.

5.4 Développements limités usuels

A l'aide de la formule de Taylor, il est possible de montrer que certaines fonctions usuelles ont des DL a tout ordre en tout point et de calculer ces développement limités . On donne ici certains de ces DL à un ordre n quelconque et en $x_0 = 0$.

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ (1+x)^k = 1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n+o_0(x^n)$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o_0(x^{2n})$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o_0(x^{2n+1})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o_0(x^n)$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1} + o_0(x^n)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_0(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o_0(x^n).$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1})$$

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1.3.5\ldots(2k+1)}{2^k(2k+1)k!}x^{2k+1} + o_0(x^{2n+1})$$

5.5 Application au calcul de limites

Une application essentielle des développements limités est de lever des indéterminations dans le calcul des limites. Dans cette section on donne quelques exemples de ces applications.

Supposons qu'on doit étudier la limite en x_0 d'une fonction F de la forme $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Si les deux fonctions ont une limite en x_0 et que la limite de g est non nulle, alors la limite de F est donnée par le quotiont des limites (proposition 2.1.2). Dans le cas ou f et g ont une limite nulle, le résultat précédent ne s'applique pas. Pour lever l'indétermination, une méthode trés performante consiste (si c'est possible) à écrire un DL de chacune des fonctions et à "simplifier la fraction".

Proposition 5.5.1 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux applications et $x_0 \in \overline{I}$. On suppose $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ et que f et g ont un $DL_n(x_0)$ donné par* {

$$\begin{aligned} f(x) =& a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}((x-x_0)^n) \\ g(x) =& b_1(x-x_0) + \ldots + b_n(x-x_0)^n + o_{x_0}((x-x_0)^n) \end{aligned} \tag{5.18}$$

On note $n_f = \inf\{k \in \{1,\ldots,n\},\, a_k \neq 0\}$ et $n_g = \inf\{k \in \{1,\ldots,n\},\, b_k \neq 0\}$. On a alors les comportements suivants :

- *si $n_f > n_g$ alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$*
- *si $n_f = n_g$ alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_{n_f}}{b_{n_g}}$.*
- *si $n_f < n_g$ alors $\frac{f}{g}$ a une limite infinie à gauche et à droite. Le signe est donné par le quotient $\frac{a_{n_f}}{b_{n_g}}$ et la différence $n_f - n_g$ (voir la preuve pour plus de détails).*

Preuve. Soit $F = \frac{f}{g}$. Quitte à poser $y = x - x_0$ on peut supposer $x_0 = 0$. On écrit

$$F(x) = \frac{\sum_{k=n_f}^{n} a_k x^k + o_0(x^n)}{\sum_{k=n_g}^{n} b_k x^k + o_0(x^n)} \tag{5.19}$$

et on factorise le numérateur et le dénominateur :

$$F(x) = \frac{x^{n_f}(\sum_{k=0}^{n-n_f} a_{k+n_f} x^k + o_0(x^{n-n_f}))}{x^{n_g}(\sum_{k=0}^{n-n_g} b_{k+n_g} x^k + o_0(x^{n-n_g}))} \tag{5.20}$$

Si $n_f > n_g$, on simplifie par x^{n_g} et on obtient

$$F(x) = \frac{x^{n_f-n_g}(\sum_{k=0}^{n-n_f} a_{k+n_f} x^k + o_0(x^{n-n_f}))}{\sum_{k=0}^{n-n_g} b_{k+n_g} x^k + o_0(x^{n-n_g})}. \tag{5.21}$$

Comme $n_f > n_g$ le numérateur tend vers 0 quand x tend vers 0. Par ailleurs, par définition de n_g on a $b_{n_g} \neq 0$ donc le dénominateur a une limite non nulle. Par suite $\lim_{x\to 0} F(x) = 0$.

Supposons maintenant que $n_f = n_g$. Alors

$$F(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n-n_f} a_{k+n_f} x^k + o_0(x^{n-n_f})}{\sum_{k=0}^{n-n_g} b_{k+n_g} x^k + o_0(x^{n-n_g})}. \tag{5.22}$$

et il est clair que $\lim_{x\to 0} F(x) = \frac{a_{n_f}}{b_{n_g}}$.

Pour finir, traitons le cas où $n_f < n_g$. La même procédure que ci-dessus montre (en simplifiant par x_{n_f}) que

$$F(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n-n_f} a_{k+n_f} x^k + o_0(x^{n-n_f})}{x^{n_g-n_f}(\sum_{k=0}^{n-n_g} b_{k+n_g} x^k + o_0(x^{n-n_g}))}. \tag{5.23}$$

Or dans cette expression, le numérateur tend vers $a_{n_f} \neq 0$ tandis que le dénominateur tend vers 0. Par suite, on a

$$\lim_{x\to 0} |F(x)| = +\infty. \tag{5.24}$$

De plus, pour $x > 0$ $F(x)$, a le signe de $\frac{a_{n_f}}{b_{n_g}}$ et pour $x < 0$, $F(x)$ a le signe de $(-1)^{n_f - n_g}\frac{a_{n_f}}{b_{n_g}}$.

Si $n_f - n_g$ est impair, on obtient des signes différents à gauche et à droite de 0. Par suite F n'a pas de limite infinie en 0, mais seulement des limites infinies à gauche et à droite de signes différents.

Si $n_f - n_g$ est pair, F a le même signe à gauche et à droite de 0. Par suite F a une limite infini en 0 dont le signe est donné par $sgn(\frac{a_{n_f}}{b_{n_g}})$.

□

Exemple 5.5.1 *Soit f définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$. Calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$.*

Preuve. C'est évidemment une forme indéterminée. On calcule un DL de $\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$ en 0. On a

$$\sin(x) - x + \frac{x^3}{6} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + O_0(x^7) - x + \frac{x^3}{6} = \frac{x^5}{5!} + O_0(x^7).$$

Par suite

$$f(x) = \frac{\frac{x^5}{5!} + O_0(x^7)}{x^5} = \frac{1}{5!} + O_0(x^2)$$

et on a clairement

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{5!}.$$

□