ALGEBRE

Index :

Polynômes:

Définition :

- Un polynôme est une somme finie de termes
- Un terme : ax^i où a est un nombre et $i \in \mathbb{N}$
- L'expression d'un polynôme est : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, a_i sont des nombres dit aussi coefficients, x est la variable.
- On peut sommer les polynômes : $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

  $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$

  $P(x) + Q(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)\, x + \ldots + (a_n + b_n)\, x^n$
- On peut aussi multiplier un polynôme par un nombre α :

  $\alpha * P(x) : \alpha a_0 + (\alpha a_1)\, x + (\alpha a_2)\, x^2 + \ldots + (\alpha a_n)\, x^n$
- On note l'ensemble des polynômes en une variable x et à coefficient dans K (= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) : $K[x]$
- De plus on peut multiplier deux polynômes :

  $P(x) * Q(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)\, x + \ldots + (a_1b_2 + a_1b_1 + a_2b_1)\, x^2 + \ldots$

  $= c_0 + c_1x + c_2x + \ldots$

  $C_i = \sum_{(kl)=k+l=i} akbl = \sum_{l=0}^{i} a_i - l\, al$

Exemple :

$P(x)Q(x) = (2 - x + x^2)(1 + 2\,x - x^2)$

$= 2 + 4\,x - 2\,x^2 - x - 2\,x^2 + x^3 + x^2 + 2\,x^3 - x^4$

$= 2 + 3\,x - 3\,x^2 + 3\,x^3 - x^4$

Degré d'un polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

Si $a_n \neq 0$, n est le degré de $P(x)$

Remarque :

- Deg 0 = - ∞ → 0 est le polynôme nul
- Deg 1 = 0 → 1 = $1x^0$
- Deg (P(x) + Q(x)) ≤ max (deg P(x) , deg Q(x))

$$\begin{cases} P(x) = 1 - x + x^2 \ \rightarrow \deg P(x) = 2 \\ Q(x) = 2 + 2x - x^2 \ \rightarrow \deg Q(x) = 2 \\ P(x) + Q(x) = 3 + x \end{cases}$$

  Si deg P(x) ≠ Q(x), alors deg ($P(x) + Q(x)$) = max (deg P(x), deg Q(x))
- Deg (P(x) * Q (x)) = deg P(x) + deg Q(x)

Vocabulaire :

- P(x) = $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ de degree n (cad $a_n \neq 0$)
- Les $a_i\, x^i$ sont les termes de P(x)
- Les x^i sont les monômes de P(x)
- Les a_i sont les coefficients de P(x)
- a_0 s'appelle le coefficient constant de P(x)
- a_1 celui de degré 1
- a_n s'appelle le coefficient de degré n ou le coefficient dominant de P(x)
- Les polynôme nul est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls et il est noté 0
- x^0 est noté 1

Définition :

f(x) et g(x) ∈ K [x]

On dit que f(x) divise g(x), et l'on note f(x) / g(x) si le reste de la division de g(x) par f(x) est nul.

On dit aussi que g(x) est un multiple de f(x) (cad g(x) =q(x)f(x) et deg g(x) = deg f(x) + deg q(x))

f, g ∈ ℕ	f(x) , g(x) ∈ K[x]
g = qf + r q,r ∈ ℕ	g(x) = q(x) f(x) + r(x)
$0 \leq r < f$	deg r(x) < deg f(x), q(x) et r(x) ∈ K[x]

Division euclidienne:

f(x) ∈ K[x]

g(x) ∈ K[x], g(x) $\neq$ 0

On va diviser f(x) par g(x)

Exemple :

f(x) = 2 $x^4 - x^2 + 3$

g(x) = $x^2 - x + 2$

$2x^4 - x^2 + 3 \quad | \ \underline{x^2 - x + 2}$

$\underline{- 2x^4 - 2x^3 + 4x^2} \quad | 2x^2 + 2x - 3 \quad \rightarrow$ q(x)

$2x^3 - 5x^2 + 3$

$\underline{- 2x^3 - 2x^2 + 4x}$

$- 3x^2 - 4x + 3$

Ainsi f(x) = ($2x^2$) g(x) + $2x^3 - 5x^2 + 3$

$- 3x^2 - 4x + 3$

$\underline{- - 3x^2 + 3x - 6}$

$- 7x + 9 \quad \rightarrow r(x)$

f(x) = ($2x^2 + 2x - 3$) g(x) - $7x + 9$ avec deg r(x) < deg g(x)

Théorème :

f(x) ∈ K[x] // g(x) ∈ K[x], g(x) $\neq$ 0

q(x) ∈ K[x] // r(x) ∈ K[x]

(q(x), r(x)) est unique et vérifie f(x) = q(x)g(x) +r (x)

Démonstration

- Unicité :
  Supposons :
  f(x) = $q_1(x)$g(x) + $r_1(x)$, deg $r_1(x)$ < deg f(x)
  f(x) = $q_2(x)$g(x) + $r_2(x)$, deg $r_2(x)$ < deg f(x)
  → $q_1(x)g(x) + r_1(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x) \leftrightarrow (q_1(x) - q_2(x))\, g(x) = r_2(x) - r_1(x)$

- Existence :
  $f(x) = f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \dots + f_0$ de degré n
  $g(x) = g_m x^m + g_{m-1} x^{m-1} + \dots + g_0$ de degré m
  <u>1° cas</u> : n < m
  $f(x) = 0 * g(x) + f(x) \rightarrow$ n= deg $r(x) <$ deg $f(x) = m$
  <u>2° cas</u> : $n \geq m$
  $f(x) = \frac{fn}{gm} x^{n-m} g(x) + (f(x) - \frac{fn}{gm} x^{n-m} g(x))$
  deg $f_1(x) <$ deg $g(x)$ // $q(x) = \frac{fn}{gm} x^{n-m} \rightarrow r(x) = f_1(x)$
  deg $f_1(x) \geq$ deg $f(x)$, en itérant on trouve $(q(x)\,,\, r(x))$

PGCD : Plus Grand Diviseur Commun:

Définition :

Un pgcd $d(x) \in K[x]$ de 2 polynômes $f(x)$ et $g(x)$ de $K[x]$ est un polynôme qui vérifie :

- $d(x) / f(x)$ et $d(x) / g(x)$
- si $\delta(x) \in K[x]$ tel que $\delta(x) / f(x)$ et $\delta(x) / g(x)$
  alors deg $\delta(x) \leq$ deg $d(x)$

Exemple :

$f(x) = x^3$ et $g(x) = x^3 + x^2$

Un pgcd de $f(x)$ et $g(x)$: x^2, $2\,x^2$, $\alpha\, x^2$ avec $\alpha \neq 0$

Définition :

« Le » PGCD de 2 polynômes $f(x)$, $g(x)$ de $K[x]$ est celui qui est unitaire (cad son coefficient dominant est 1).

Il est unique et c'est celui-ci que l'on note pgcd($f(x)$,$g(x)$)

Comment peut-on calculer pgcd($f(x)$,$g(x)$) ?

Algorithme d'Euclide : deg $f(x) \geq$ deg $g(x)$

On effectue la division de $f(x)$ par $g(x)$: $f(x) = q(x)\, g(x) + r(x)$ // deg $r(x) <$ deg $g(x) \rightarrow g(x) = r(x)$

Alors pgcd($f(x)$,$g(x)$) = pgcd ($g(x)$,$r(x)$)

pgcd($f(x)$,$g(x)$) divise $f(x)$ et $g(x)$, donc divise aussi $r(x)$

pgcd($f(x)$,$g(x)$) est un diviseur commun à $g(x)$ et $r(x)$

deg pgcd(f(x),g(x)) = deg pgcd(g(x),r(x))

pgcd(g(x),r(x)) divise g(x) et r(x), donc divise aussi f(x)

$$\left.\begin{array}{l} f_0(x) = \mathrm{q}_1(x)\mathrm{g}\,(x) + \mathrm{r}(x) \\ f_1(x) = \mathrm{q}_2(x)\mathrm{f}_2\,(x) + \mathrm{f}_3(x) \end{array}\right. \rightarrow \mathrm{pgcd}\,(f_0, f_1) = \mathrm{pgcd}\,(f_1, f_2) = \mathrm{pgcd}\,(f_2, f_3)$$

Avec deg f_3 $(x) \leq$ deg f_2 (x)

En itérant on obtient une suite strictement décroissante, donc on va trouver i tel que f_2 (x) est le polynôme nul

$$\begin{array}{l} f_0(x) = \mathrm{q}_1(x)\mathrm{g}\,(x) + \mathrm{r}(x) \\ f_1(x) = \mathrm{q}_2(x)\mathrm{f}_2\,(x) + \mathrm{f}_3(x) \\ \qquad\qquad \vdots \\ f_{i-2}(x) = \mathrm{q}_{\mathrm{i}-1}(x)\mathrm{f}_{\mathrm{i}-1}\,(x) + 0\mathrm{f}_{\mathrm{i}}(x) \end{array}$$

En remontant l'algorithme d'Euclide on obtient l'identité pgcd (f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x) → dite de Bézout, où u(x), v(x) sont 2 polynômes

Lemme :

Si f(x), g(x) et d(x) sont des polynômes tel que :

$$\left.\begin{array}{l} d(x)\ /\ f(x) * g(x) \\ \mathrm{pgcd}(\mathrm{d}(x), \mathrm{f}(x)) = 1 \end{array}\right\}\ \mathrm{d}(x)\ /\ \mathrm{g}(x)$$

[Retour page de cours du site](#)

[Retour en haut de page](#)