ALGEBRE

Index :

Espaces vectoriels :

Définition :

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$,…,$\mathbb{R}^n$ avec n $\in \mathbb{N}^*$ $\rightarrow$ $\{x_1, x_2, \dots x_n, x \in \mathbb{R}\}$

Soit E un ensemble quelconque muni d'une addition (loi interne) et d'une loi externe (notée par .)

La loi interne associée à chaque couple (v,w) ∈ E * E un calcul tel que : v + w ∈ E

La loi externe associée à chaque couple (α,v) ∈ K * E pour lequel on associe $\alpha *$v

<u>Ces 2 lois vérifient :</u>

- $(\alpha, \beta) \in K^2$, v ∈ E → α.(β.v) = (α.β) .v
- $(\alpha,\beta) \in K^2$, v ∈ E → (α+β).v = α.v + β.v
- α ∈ K, (v,w) ∈ E → α.(v+w) = α .v + α.w
- (v,w) ∈ E * E → v + w = w + E
- ∃ un élément de E que l'on note O et qui vérifie v ∈ E, V + O = C
- (u,v,w) ∈ E*E*E → (u+v)+w = u + v + w = u + (v+w)
- ∀ u, ∃ v ∈ E tel que u + v = 0 et 1.v = v

Matrices :

L'ensemble des matrices à coefficients réels ayant n lignes et m colonnes s'écrit $M_{n/m}$ ($\mathbb{R}$)

$M_{2/3}$ ($\mathbb{R}$) = $\left\{\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} : a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\right\}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ b_1 & d_1 & f_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & c_2 & e_2 \\ b_2 & d_2 & f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & \dots & e_1 + e_2 \\ b_1 + b_2 & \dots & f_1 + f_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & e_1 \\ b_1 & d_1 & f_1 \end{pmatrix} * \alpha = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha c_1 & \alpha e_1 \\ \alpha b_1 & \alpha d_1 & \alpha f_1 \end{pmatrix}$$

Alors $M_{n/m}$ ($\mathbb{R}$) ev sur $\mathbb{R}$

E ou F = K – ev → f : E->F application V → f(V)

f est dite linéaire :

- (v,w) ∈ E*E, f(v+w) = f(v) + f(w)
- (α,v) ∈ K * E, f(α.v) = α.f(v)

Bases :

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \{(1,0);\ (0,1); (1,1)\}$ est-elle une base ?

Réponse = non car : 1*(1.0) + 1* (0.1) = (1,1)

Une base est libre et génératrice.

Libre : pas de combinaison linéaire possible entre les vecteurs,

seule façon d'avoir 0 : $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

Une famille libre maximale, cad qui contient autant d'élément que la dimension, est une base.

Une famille qui contient moins d'élément que la dimension n'est jamais génératrice.

Une famille génératrice minimale est forcement une base, et est à la fois libre maximale.

Sous-espaces vectoriels :

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \end{cases}\right\}$$

Sev de $\mathbb{R}^3$ = $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

= ker $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

f : E → F, E et F (K - ev), f application linéaire, alors ker f = $\{v \ \in E : f(v) = 0\}$ ⊂ E

Im(f) = $\{f(w) : w \ \in E\}$ ⊂ F, sev F

- w_1, w_2 ∈ E → f(w_1) + f(w_2) = f(w_1 + w_2) ∈ Im(f)
- α ∈ K, f(w), w ∈ E → α.f(w) = f(αw) ∈ Im(f)

f : E → F application linéaire

E ev de dimension n, base (e_1, e_n)

F ev de dimension m, base (f_1, f_m)

Définition :

La matrice de f dans les bases (e_1, e_n), (f_1, f_m)

$f(e_1) \in F \to f(e_1) = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_m$, $\alpha_l \in K$

$f(e_2) \in F \to f(e_2) = \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_n f_m$, $\beta_l \in K$

$f(e_m) \in F \to f(e_m) = \gamma_1 f_1 + \ldots + \gamma_m f_m$, $\gamma_l \in K$

$$M = \begin{array}{c c} \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{array} & \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_m & \beta_m & \gamma_m \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_m) \end{array} \end{array}$$

Exemple :

f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z)\ (x - y + z, 2x + 3y - z)$

Matrice de f dans les bases canoniques $\{(1,0,0);\ (0,1,0); (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ et $\{(1,0); (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$

$$M = \begin{array}{c c} \begin{array}{c} f(1,0) \\ f(0,1) \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \end{array} \end{array}$$

f(1,0,0) = 1*(1,0) + 2(0,1) = (1,2)

f(0,1,0) = -1 (1,0) + 3(0,1) = (-1,3)

f(0,0,1) = 1(1,0) + -1 (0,1) = (1,-1)

Remarque :

- La matrice de f_A dans les bases canoniques est exactement la même que la matrice A

Retour page de cours du site

Retour en haut de page