ALGEBRE

Index :

Triangularité des matrices:

Rendre une matrice semblable à une matrice diagonale :

A ∈ $M_n(K)$ $\underset{\rightarrow}{triangulaire}$ T = $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1\ ou\ 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 1\ ou\ 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Exemple :

A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- A est-elle diagonalisable ?

Le polynôme caractéristique de $P_A(\lambda)$ = det (A – λI)

= det $\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

= det $\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ = det $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ = det $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ . & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

= $(2-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda)+1]$

= $(2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$

= $(2-\lambda)(\lambda-2)$

= $-(\lambda-2)^3$

A n'a qu'une seule valeur propre, λ = 2 qui est triple.

A diagonalisable ↔ dim E_2 = 3 (espace propre associée à la valeur du vecteur propre 2)

E_2 = Ker (A – 2I) = Ker $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Soit (S) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} -y+z=0 \\ x+y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

$E_2 = \left\{(x,y,z):\ \begin{matrix} -y+z=0 \\ x+y=0 \\ y-z=0 \end{matrix}\right.$ $\rightarrow$ E_2 est un ev car c'est un sev de $\mathbb{R}^3$

La dimension de E_2 est donc : $0 \leq \dim E_2 \leq 3$

Ce n'est pas 0, car E_2 n'est pas une matrice nulle.

Ce n'est pas 3, car E_2 est réductible (gauss)

Donc dim E_2 = 1 ou 2 $\rightarrow$ A n'est pas diagonalisable

Dim E_2 = 3 – rang B = 3 – 2 = 1 (avec B bloc de Jordan)

$E_2 = \left\{(x,y,z):\ \begin{matrix} y=z \\ x=-y \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} (-y,y,y) \\ y\,(-1,1,1) \end{matrix} : y\ qlq\right\}$ Droite engendrée par V_1 = (-1,1,1)

On va triangulariser A c'est-à-dire trouver Q inversible tel que T = $Q^{-1}AQ$ soit triangulaire :

$$\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 2 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{dim 2}$$

Déterminons V_2 et V_3 :

$AV_2 = V_1 + 2V_2$: $V_2 = (\alpha, \beta, \gamma)$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma = 2\alpha - 1 \\ \alpha + 3\beta = 2\beta + 1 \\ \beta + \gamma = 2\gamma + 1 \end{cases} = \begin{cases} -\beta + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \beta - \gamma = 1 \end{cases} = \begin{cases} \gamma = \beta - 1 \\ \alpha = -\beta + 1 \end{cases} : \beta\ qlq$

Si β = 0 : V_2 = (1, 0, -1)

$AV_3 = V_2 + 2V_3$: $V_3 = (a, b, c)$

$\begin{cases} 2a - b + c = 2a + 1 \\ a + 2b = 2b \\ b + c = 2c - 1 \end{cases} = \begin{cases} -b + a = 1 \\ a = 0 \\ b - c = 1 \end{cases} = \begin{cases} a = 0 \\ b = c - 1 \end{cases} : c\ qlq$

Si c = 0 : V_3 = (0, -1, 0)

Ainsi Q = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque :

- $(A - 2I)(V_2) = V_1$
- $(A - 2I)^3(V_3) = (A - 2I)^2(V_2) = (A - 2I)(V_1) = 0$

Espace caractéristique:

Définition :

λ valeur propre de A. On appelle espace caractéristique de A associé à λ :

$F_\lambda = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)^{m\lambda}$ où $m\lambda$ est la multiplicité de la vp λ (vue comme racine du polynôme caractéristique)

$\dim F_\lambda = m\lambda$

Remarque :

- $1 \leq \dim \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I) \leq m\lambda$ // $\dim \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)^{m\lambda} = m\lambda$

Théorème de Cayley Hamilton:

$A \in M_n(K)$,

$P_A(\lambda)$ le polynôme caractéristique de $A = (-1)^n\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$, $a \in K$

$P_A(A) = (-1)^n A^n + {}_{a1}A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_n I = 0$

Supposons A diagonale : $\exists$ P inversible tel que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, λ_i vp de A

$$P^{-1}AP = D = (-1)^n\begin{pmatrix} {\lambda_1}^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {\lambda_n}^n \end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix} {\lambda_1}^{n-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {\lambda_n}^{n-1} \end{pmatrix} + \dots + a_{n-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} + a_n\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n D^n + a_i P^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n I = 0$$

$$= \begin{pmatrix} P_A(\lambda_1)^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_A(\lambda_n)^n \end{pmatrix} = 0$$

Blocs de Jordan:

Définition :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$ Un bloc de Jordan de taille n

Exemple :

- Pour n = 2 : $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
- Pour n = 3 : $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Théorème :

Toute matrice $A \in M_n(K)$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est semblable à une matrice triangulaire T de la forme $\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix}$, il existe P tel que $P^{-1}AP = T$, où $J_1, \ldots, J_p$ sont des bloc de Jordan à coefficient dans $\mathbb{C}$.

T peut avoir la forme suivante : $\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ 3 blocs de Jordan

Les blocs J_1 en sont pas forcement associés à des valeurs propres distinctes.

Vocabulaire :

- La matrice T qui apparait dans ce théorème s'appelle la réduite de Jordan de A.

Propriétés des blocs de Jordan :

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix}$$

$$A^n = PT^mP^{-1} = P\begin{pmatrix} {J_1}^m & & \\ & \ddots & \\ & & {J_p}^m \end{pmatrix} P^{-1}$$

Application:

Supposons n variables $x_1, \ldots, x^n$ (que l'on notera x, y si n = 2, et x, y, z si n=3) qui dépendent d'une variable t (le temps)

Le but est d'étudier ces variables en fonction du temps.

On fait l'hypothèse que les valeurs $x_{1,t+1} \ldots x_{n,t+1}$ de ces variables au temps t+1 sont des combinaisons linéaires de $x_{1,t}, \ldots, x_{n,t}$ (on suppose t discret)

$$\begin{cases} x_{1,t+1} = \alpha_{1,1}x_{1,t} + \ldots + \alpha_{1,n}x_{n,t} \\ \vdots \\ x_{n,t+1} = \alpha_{n,1}x_{1,t} + \ldots + \alpha_{n,n}x_{n,t} \end{cases}$$ $\rightarrow \alpha_{i,j}$ sont des nombres constants sous formes matricielles :

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ \vdots \\ x_{n,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ \vdots \\ x_{n,t} \end{pmatrix} = x_{t+1} = Ax_t$$, où A est une matrice carrée de taille n

Si on part d'un t_0 : t_0, t_{0+1}, t_{0+2}

On veut savoir x_{t0+r}, $r \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{matrix} x_{t0+r} = Ax_{t0+r-1} \\ x_{t0+r-1} = Ax_{t0+r-2} \end{matrix}\right\} x_{t0+r} = A^2 x_{t0+r-2}$$

En itérant $x_{to+r} = A^r x_{t0}$

x_{t0} est donnée, c'est ce qu'on appelle la valeur initiale.

Pour avoir x_{t0+r} pour $r \in \mathbb{N}^*$, il suffit de savoir calculer A^r

1° cas : A est diagonalisable

Il existe P inversible tel que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$A = PDP^{-1} \rightarrow A^r = PD^rP^{-1}$, donc $A^r = P \begin{pmatrix} {\lambda_1}^r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {\lambda_n}^r \end{pmatrix} P^{-1}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les vp de A

Les colonnes de P sont données par les vecteurs propres.

2° cas : A n'est pas diagonalisable

On peut toujours la triangulariser sur $\mathbb{C}$

Il existe Q inversible tel que $Q^{-1}AQ = T$ triangulaire supérieure.

On peut trouver T qui est la réplique de Jordan de A « qui est la matrice triangulaire semblable à A la plus proche de la matrice diagonale »

T = $\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_p} \end{pmatrix}$ où J_i sont des matrices que l'on appelle des blocs de Jordan

$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}$ où les λ_k sont les valeurs de A et δ_i = 0 ou 1

$A^r = QT^rQ^{-1} = Q \begin{pmatrix} {J_1}^r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {J_p}^r \end{pmatrix} Q^{-1}$

- Comment peut-on calculer J_i^r ? (si J_i n'est pas diagonale)
  $J_i = \lambda_k I + N_i$, N_i est une matrice non nulle triangulaire ayant une diagonale nulle.
  $(N_i)^2$ est triangulaire $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \gamma_n \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ où les γ_i sont égaux à 1 ou 2.
  N_i^q où q est la taille de J_i
  Donc $J_i^{\,r} = (\lambda_k I + N_i)^r$, $r \geq q$
  $= \sum_{j=0}^{r} C_r^j \lambda_k N_i^{r-1} + \ldots + C_r^r \lambda_k^{\,r} I$
  $= C_r^{\,0} N_i^r + C_r^{\,1} \lambda_k N_i^{\,r-1} + \ldots + C_r^{\,r} \lambda_k^{\,r} I$
  $= \begin{pmatrix} {C_r}^r {\lambda_k}^r & {C_r}^{r-1} {\lambda_k}^{q-1} & \\ & \ddots & {C_r}^{r-1} {\lambda_k}^{q-1} \\ & & {C_r}^r {\lambda_k}^r \end{pmatrix}$

Calcul à l'aide des variables :

$x_1, \ldots, x_n$ // $x_{1(t)}, \ldots x_{n(t)}$

$\begin{pmatrix} x'_{1(t)} \\ \vdots \\ x'_{n(t)} \end{pmatrix} = (A) \begin{pmatrix} x_{1(t)} \\ \vdots \\ x_{n(t)} \end{pmatrix}$ où A est une matrice à coefficient constant.

Dans ce problème, A est continue. On cherche $x_{1(t)}, \ldots x_{n(t)}$ qui vérifie le système différentiel d'ordre 1 ci-dessus.

1° cas : A diagonalisable

Il existe P inversible tel que $P^{-1}AP = D$ est une matrice diagonale.

Le système $x'_{(t)} = A\, x_{(t)}$ devient $x'_{(t)} = PDP^{-1}\, x_{(t)}$

$P_{-1}\, x'_{(t)} = P^{-1}PDP^{-1}\, x_{(t)}$

$P_{-1}\, x'_{(t)} = DP^{-1}\, x_{(t)}$

Avec un changement de variable on obtient : $y_{(t)}$ = P_{-1} $x_{(t)} \rightarrow y'_{(t)}$ = P_{-1} $x'_{(t)}$, donc $y'_{(t)}$ = D $y'_{(t)}$:

$$\begin{pmatrix} y'_{1(t)} \\ \vdots \\ y'_{n(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1(t)} \\ \vdots \\ y_{n(t)} \end{pmatrix} = \begin{cases} y_1{}'_{(t)} = \lambda_1 y_{1(t)} \\ \vdots \\ y_n{}'_{(t)} = \lambda_n y_{n(t)} \end{cases}$$

Ce changement de variable transforme le système $x'_{(t)}$ = A $x_{(t)}$ en un système (dit à variables séparées) formé par n équations différentielles d'ordre 1 (sans second membres).

$\begin{cases} y_1{}'_{(t)} = \lambda_1 y_{1(t)} \\ \vdots \\ y_n{}'_{(t)} = \lambda_n y_{n(t)} \end{cases}$, où les λ_i sont des nombres

$\begin{cases} y_{1(t)} = c_1 e^{\lambda 1 t} \\ \vdots \\ y_{n(t)} = c_n e^{\lambda n t} \end{cases}$, c_1, … , c_n constant

On a $x_{(t)}$ = P$y_{(t)}$

On vient de trouver $y_{(t)}$, P se calcul en diagonalisant A, et ainsi on en déduit $x_{(t)}$

2° cas : A n'est pas diagonalisable, elle est triangularisable.

On cherche sa réduite de Jordan T.

Le même changement de variable conduit à $y'_{(t)}$ = T$y_{(t)}$

$\begin{cases} y_1{}'_{(t)} = \lambda_1 y_{1(t)} + \delta_1 y_{2(t)} \\ \vdots \\ y_n{}'_{(t)} = \lambda_{n-1} y_{n-1(t)} + \delta_{n-1} y_{n(t)} \end{cases}$, o* λ_l vp de A, δ_u = 1 ou 0

$y_n{}'_{(t)}$ = λ_n $y_{n(t)}$ pour $y_{n(t)}$ = $C_n e^{\lambda t}$

Si δ_{n-1} = 0 , alors $y'_{n-1(t)}$ = $C_n e^{\lambda n-1t}$

Si δ_{n-1} = 1, $y'_{n-1(t)}$ = λ_{n-1} $y_{n-1(t)}$ + $C_n e^{\lambda nt}$, C_n nombre

↓

Equation différentielle d'ordre avec second membre

Retour page de cours du site

Retour en haut de page