ALGEBRE

Index :

Diagonalisation des matrices:

Définition :

Q = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice inversible (ad – bc $\neq$ 0)

$Q^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$Q^{-1}BQ = (\ldots) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d(a+2c) - bc & 2d^2 \\ 2c^2 & -2(b+2d) + ad \end{pmatrix}$

Exemple :

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

P = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible car det P = -2 $\neq$ 0

$P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Existe-t-il une matrice Q inversible tel que $Q^{-1}BQ$ diagonale ?
  Si $Q^{-1}BQ$ est diagonale, c = d = 0, or ad – bc $\neq$ 0
  Donc il n'existe pas Q inversible tel que $Q^{-1}BQ$ diagonale .

Si A est diagonalisable, B ne l'est pas.

- L'intérêt de diagonaliser une matrice ?
  1. Calcul du déterminant
  2. Calcul des puissances d'une matrice A

$P^{-1}AP$ = D diagonale = $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_l \end{pmatrix}$, ainsi $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1{}^n & 0 \\ 0 & \lambda_l{}^n \end{pmatrix}$

$(P^{-1}AP)\,(P^{-1}AP) - (P^{-1}AP) = D^n = A^n$

Valeurs et vecteurs propres:

$A \in M_n (K)$, où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition :

Une valeur propre $\lambda \in K$ de A est un nombre pour lequel il existe un vecteur $x \neq 0$, tel que $A\,x = \lambda\,x$

On dit que λ est une valeur propre associée au vecteur propre x.

Démonstration

- Existence de valeurs propres et vecteurs propres :

$A\,x = \lambda\,x \leftrightarrow (A - \lambda\, I)(x) = 0 \leftrightarrow x \in \text{Ker}\,(A - \lambda\, I) \leftrightarrow (A - \lambda\, I) \leftrightarrow \det\,(A - \lambda\, I)$ (polynôme en λ)

Les valeurs propres de A sont strictement les racines de polynôme $f(\lambda) = \det\,(A - \lambda\, I)$

Ce polynôme s'appelle le polynôme caractéristique de la matrice A.

Le degré de $f(\lambda)$ est exactement n, donc le nombre de valeurs propres de A est au plus n.

Pour les valeurs propres : $\text{Ker}\,(A - \lambda\, I)$, où λ est une valeur propre, est l'ensemble des vecteurs propres associées à la valeur propre de A. Cet ensemble sera noté $E\,\lambda$ et on l'appelle l'espace propre de A associé à la valeur propre de λ

<u>*Situation :*</u> $A \in M_n (K)$, $f(\lambda) = \det\,(A - \lambda\, I) \in K[x]$

$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m1} \ldots (\lambda - \lambda_n)^{mn}\, f_1(\lambda)\, f_d(\lambda) \rightarrow (K = \mathbb{R})$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des éventuelles racines réelles de $f(\lambda)$ et $f_1(\lambda)\, f_d(\lambda)$ sont des polynômes de degré 2 ayant des discriminants négatif.

$f(\lambda) = c\,(\lambda - \lambda_1)^{m1}\,(\lambda - \lambda_n)^{mn} \rightarrow (K = \mathbb{C})$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les différentes racines de $f(\lambda)$ et $m_1, \ldots, m_n$ leur multiplicités respectives.

$1 \leq \dim E\,\lambda_1 \leq$ multiplicité de λ_i considéré comme racine où λ

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f_A(\lambda) = \det\,(A - \lambda\, I) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

Les valeurs propres de A sont donc -1 et 1 et elles sont simples.

E_1 = Ker (A – 1 * I) = Ker $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ = $\left\{(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right.$

= $\left\{ \begin{array}{l} (x,y) = 2x - y = 0 = \ \{x, -2x), x \text{ qlq}\} \\ \qquad y = \ -2x = \{x\ (1,-2), x\ \leq K\} \end{array} \right.$ droite engendré par (1, -2)

$f_B(\lambda)$ = det (B – λ I) = $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$ - $(1 - \lambda)^2$

1 est ma seule valeur propre de B et elle est double car de multiplicité 2

E_1 = Ker (B – I) = Ker $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ = { (x,y) $2y = 0$ { $x(1{,}0)x$} droite vectoriel engendrée par (1,0)

Théorème :

A ∈ M_n (K), où K = ℝ ou ℂ

A est diagonalisable sur K (càd il existe P inversible à coefficient dans K tel que PAP^{-1} soit diagonale) ↔ toutes les valeurs propres de A équivalent à K et pour toutes les valeurs propres λ de A, dim E_λ est strictement la multiplicité de λ vue comme racine du polynôme caractéristique de A.

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur ℝ

B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur ℝ car la dimension de l'espace associée à la seule valeur propre de B n'est pas égale à 2 = multiplicité de 1 comme racine du polynôme $(\lambda - 1)^2$

- Si A est diagonalisable sur K, comment peut-on la diagonaliser ? (càd comment trouver P tel que PAP^{-1} est diagonale)

Propriétés :

Soient λ_1,..., λ_r les différentes valeurs propres de A

$\mathrm{E}_{\lambda 1}$, … , $\mathrm{E}_{\lambda r}$ les espaces propres respectifs

Si B_1 est une base $\mathrm{E}_{\lambda 1}$ et B_n est une base de $\mathrm{E}_{\lambda r}$, alors la réunion $B_1 \cup \ldots \cup B_n$ est dissoute et libre

Dans le cas où A est diagonalisable $B_1 \cup \ldots \cup B_n$ est une base de K^n

La matrice P est la matrice dont les colonnes sont les racines de ses espaces propres.

[Retour page de cours du site]

[Retour en haut de page]