ALGEBRE

Index :

Déterminant :

Définition :

- U $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ = ad – bc   // a, b, c, d ⊂ K = ℝ ou ℂ
- U $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ = - d $\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}$ + e $\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}$ - f $\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

= - d (bi – ch) + e (ai – cg) – f (ah – bg)

Remarque :

- $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

A ∈ Mn (K) = L'ensemble de matrice carrées de tailles n à coefficients dans K : $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Det A = $\begin{vmatrix} a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \end{vmatrix}$ = $a_{i1} A_{i1}$ + …

→ A_{i1} est la matrice détermine à partir de A en supprimant la 1° ligne et la 1° colonne → Les matrices A_{i1},…,A_{in} sont carrées de taille n-1

Remarque :

- Det A ne dépend pas de la ligne ou de la colonne choisi pour son développement

Propriétés :

- A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- αA = $\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$
- $\det(\alpha A) = \alpha^2$ det A = α^2ad - α^2cd
- $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ = $\begin{vmatrix} a & b & & e & b \\ c & d & + & f & d \end{vmatrix}$
- A $\in$ d^n, α $\in$ K, det (αA) = α^n det(A)
- Soit B $\in$ Mn (K) dont une des colonnes ou des lignes (ici la nième) est de la forme : $\begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ \vdots \\ b_n + c_n \end{pmatrix}$

  = $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ Alors det B = det E + det F (ou E = $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et F = $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$)

Remarque :

- $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ = cb – ad = - $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$
- Si B est la matrice obtenue à partir de A en ajoutant à une ligne une combinaison des autres lignes, alors det(B) = det (A)

Propriétés :

- Det (AB) = det (A) * det (B)
- Si A est une matrice inversible, (cad il existe une matrice B tq AB = BA = I) alors det (A) $\neq$ 0
- Det (AA^{-1}) = det (I) = 1 $\rightarrow$ det (A^{-1}) = $\frac{1}{\det A}$

Intérêt du déterminant :

1. E ev de dim n // v_i, .., v_n des vecteurs de E. Est-ce que la famille {V_1,…,V_n} est libre ?
   Soit (e_i, .., e_n) une base de E, et chaque v_i = $\alpha_i e_i$ + … + $\alpha_n e_n$:
   (v_1, …, v_n) est libre (donc une base de E) $\leftrightarrow$ det (v_1, …, v_n) = $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

2. Résolution du système linéaire (par la méthode de Cramer),
   A $\in$ Mn donné, b $\begin{pmatrix} b1 \\ \vdots \\ bn \end{pmatrix}$ donné.
   On cherche les vecteurs x qui vérifient Ax = b, x = $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
   Si det(A) $\neq$ 0 : x = A^{-1}b $\rightarrow$ une seule solution possible

Sinon : x = $\frac{\det Ai}{\det A}$ où Ai est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la nième colonne de A par le vecteur b

Exemple : $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

X = $\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{5}{5} = 1$ et Y = $\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{5} = -1$

Inversion de matrices :

Définition :

C'est une matrice de même taille que A dont le coefficient qui se trouve sur la jème ligne et la ième colonne est la $(-1)^{i+j}$ * det (A_{ij}) où A_{ij} est la matrice obtenue à partir de A en supprimant la jième ligne et la ième colonne .

Exemple :

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Ainsi adj (A) = $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Et donc $A^{-1} = \frac{transpos\acute{e}t\,(adj\ (A))}{\det A}$

Comme det A = -2 ≠ 0, $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{-2} \end{pmatrix}$

Vérification : $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

[Retour page de cours du site]

[Retour en haut de page]