Prise de note Automates et Langages

Cours 1 : Automates finis déterministes

Dénombrabilité :

- Un alphabet Σ est un ensemble fini de symboles
- L'ensemble des mots Σ∗ sur l'alphabet Σ

✍ (infini) dénombrable

- ➔ bijection sur ℕ
- ➔ infini le plus petit
- ➔ C'est un nombre fini de mots par génération inductive (taille des mots …)

- L'ensemble des langages sur l'alphabet Σ

✍ Non-dénombrable

- ➔ infinité > ℕ, ($\mathcal{O}(\mathbb{R})$)

Preuve de non-dénombrabilité :

Preuve de non-dénombrabilité

	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7	σ_8	σ_9	σ_{10}	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}	σ_{14}	...
L_0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	...
L_1	1	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	...
L_2	0	1	$\boxed{0}$	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	...
L_3	0	1	0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	...
L_4	0	0	1	0	$\boxed{0}$	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	...
L_5	1	0	1	0	1	$\boxed{1}$	0	0	0	0	0	1	0	1	0	...
⋮																

- ✦ soit L le langage tel que :

  $\sigma_i \in L$ ssi $\sigma_i \notin L_i$
- ✦ ici $L = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \dots\}$
- ✦ il ne figure pas dans notre liste donc elle est incomplète
- ✦ pour n'importe quelle liste, on peut exhiber un langage qui n'y appartient pas.

⇒ l'ensemble des langages sur Σ n'est pas dénombrable.

Ici les σ_i sont les mots, et les L_i les langages

Si l'ensemble des langages étaient dénombrables, alors on pourrait les mettre en bijection avec ℕ (et donc les numérotés : L_0, L_1, …)

On bâti un langage L en prenant l'inverse de la diagonale : si 0 ∉ L_0, alors 0∈ L
Or il n'y a pas de langages listées dont le croisement de L_i avec L ne soit pas contradictoire

Donc si $L_{i_{\gamma_i}} \neq L_{\gamma_i}$, alors l'ensemble des langages sur Σ est non-dénombrable

Cours 2 : Théorème de Kleene

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{ER} \arrow[dr] & \\
\text{LR} \arrow[ur] \arrow[rr, shift right] & & \text{AFN} \arrow[ll, shift right]
\end{tikzcd}
$$

On peut passer d'un langage régulier à un automate fini par le biais des expressions régulières et inversement !

Pour passer d'un automate à une expression régulière, on utilise le langage associé à un état, c'est à dire qu'on fait de chaque état un état initial, et L(A) vaut les mots à partir de chacun de ces états : $L_{q1} = L(A)$