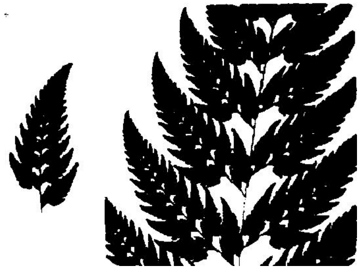


7 - Grammaires non-contextuelles (suite)

Problème de l'appartenance

- Il s'agit d'un problème de décision sur les langages algébriques.
  (directement utile en compilation, traitement des langues naturelles ...)

  Données :
  - G = (N,T,P,S) une grammaire algébrique
  - $\mu \in T^*$ un mot

  Question :
  - Est-ce que $\mu \in L(G)$?

- Une idée consiste à faire une analyse descendante du mot.

  Soit G=(N,T,P,S) telle que P ait k productions : on mime depuis l'axiome les dérivations de G. Avec G sous FNC, les algorithmes obtenus sont en $k^{|m|}$, $|m|$ étant la longueur du mot à traiter.

- Une autre idée consiste à faire une analyse ascendante du mot.
  Algorithme de Cocke, Younger et Kasami (1965) :
  - il part d'une grammaire sous FNC
  - il utilise l'idée de « *programmation dynamique* » vue en algo.

Idée

- Facteur de μ débutant à la lettre $\mu(i)$ et de longueur j :

  $$\mu_{i,j} = \mu(i)\ \mu(i+1) \ldots\ \mu(i+j-1)$$

- Pour tout couple (i,j), on calcule l'ensemble des variables :

  $$V_{i,j} = \{ A,\ A \in N \text{ et tel que } A \rightarrow^* \mu_{i,j} \}$$

- Le problème de l'appartenance se formule ainsi :

  $$\mu \in L(G)\ ? \Leftrightarrow S \in V_{1,|\mu|}\ ?$$

Algorithme CYK

début

pour i **de** 1 **à** n **faire** *// initialisation 1re ligne*

$V_{i,1} \leftarrow \{A,\ A \in N,\ A \rightarrow \mu(i) \in P\}$ *// avec j fixé à 1*

pour j **de** 2 **à** n **faire**

pour i **de** 1 **à** n-j+1 **faire** *// pour chaque case de la ligne j*

$V_{i,j} \leftarrow \varnothing$

pour k **de** 1 **à** j-1 **faire**

$V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{ A$ tels que $A \rightarrow BC \in P$ avec $B \in V_{i,k}$ et $C \in V_{i+k,j-k} \}$

si $S \in V_{1,|\mu|}$ **alors** μ est engendré par G **sinon** non

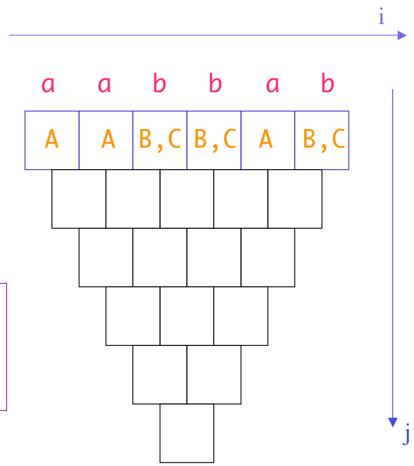
fin

Exemple

G = ({S,A,B,C}, T={a,b}, S, P)
P = { S → AB | BB
A → CC | AB | a
B → BB | CA | b
C → BA | AA | b }

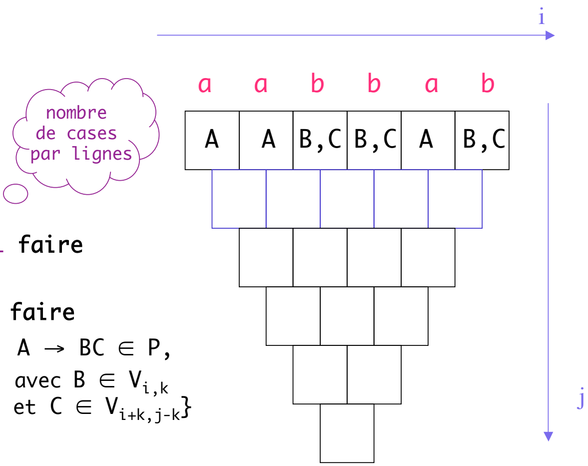
A-t-on μ = aabbab ∈ L(G) ?

j = 1
pour i **de** 1 **à** n **faire**
$V_{i,1} \leftarrow$ {A, A ∈ N et A → μ(i) ∈ P }



Exemple

S → AB | BB
A → CC | AB | a
B → BB | CA | b
C → BA | AA | b

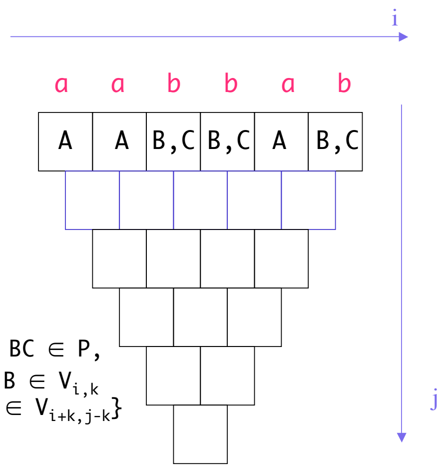


pour j = 2
pour i **de** 1 **à** n-j+1 **faire**
$V_{i,j} \leftarrow \emptyset$
pour k **de** 1 **à** j-1 **faire**
$V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup$ {A, A → BC ∈ P,
avec B ∈ $V_{i,k}$
et C ∈ $V_{i+k,j-k}$}

Exemple

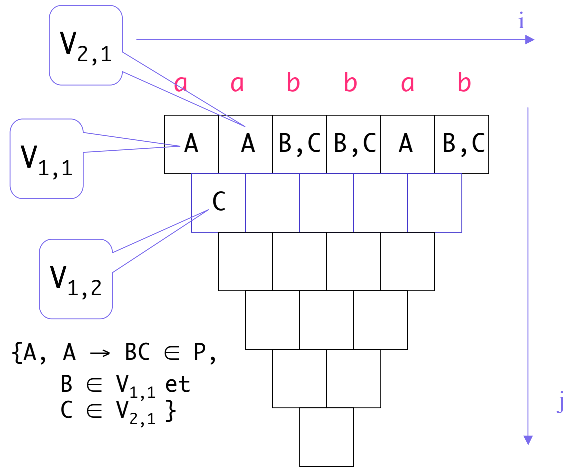
S → AB | BB
A → CC | AB | a
B → BB | CA | b
C → BA | AA | b

pour j = 2
pour i = 1
$V_{i,j} \leftarrow \emptyset$
pour k **de** 1 **à** j-1 **faire**
$V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup$ {A, A → BC ∈ P,
avec B ∈ $V_{i,k}$
et C ∈ $V_{i+k,j-k}$}



Exemple

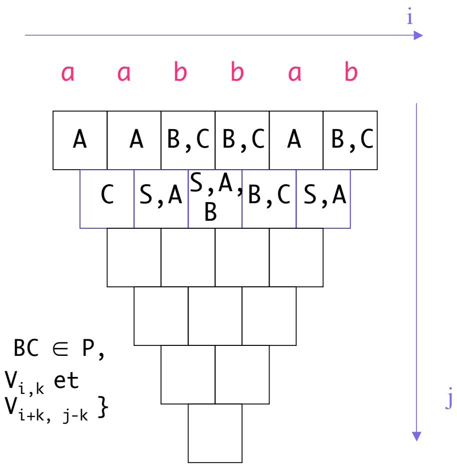
S → AB | BB
A → CC | AB | a
B → BB | CA | b
C → BA | AA | b



pour j = 2
pour i = 1
$V_{1,2} \leftarrow \emptyset$
pour k = 1
$V_{1,2} \leftarrow V_{1,2} \cup$ {A, A → BC ∈ P,
B ∈ $V_{1,1}$ et
C ∈ $V_{2,1}$ }

Exemple

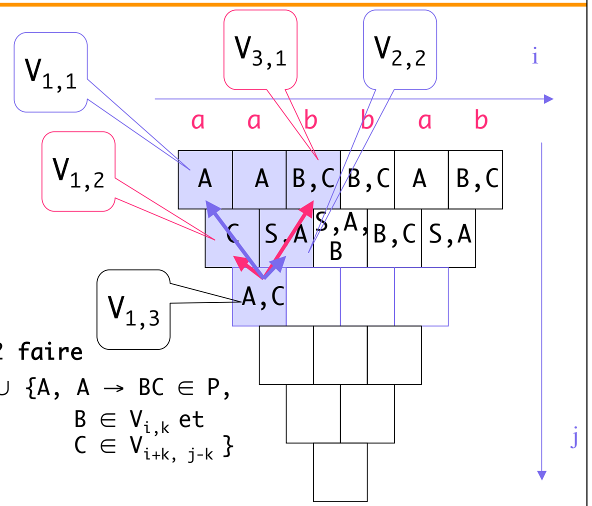
$S \to AB \mid BB$
$A \to CC \mid AB \mid a$
$B \to BB \mid CA \mid b$
$C \to BA \mid AA \mid b$



pour $j = 2$
  pour $i = 2, 3, 4, 5$
    $V_{i,j} \leftarrow \emptyset$
    pour $k = 1$
      $V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,$
        $B \in V_{i,k}$ et
        $C \in V_{i+k,\ j-k}\ \}$

Exemple

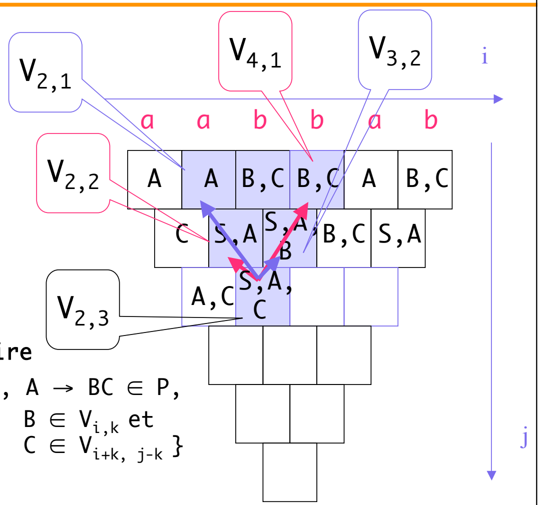
$S \to AB \mid BB$
$A \to CC \mid AB \mid a$
$B \to BB \mid CA \mid b$
$C \to BA \mid AA \mid b$



pour $j = 3$
  pour $i = 1$
    $V_{i,j} \leftarrow \emptyset$
    pour k de 1 à 2 faire
      $V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,$
        $B \in V_{i,k}$ et
        $C \in V_{i+k,\ j-k}\ \}$

Exemple

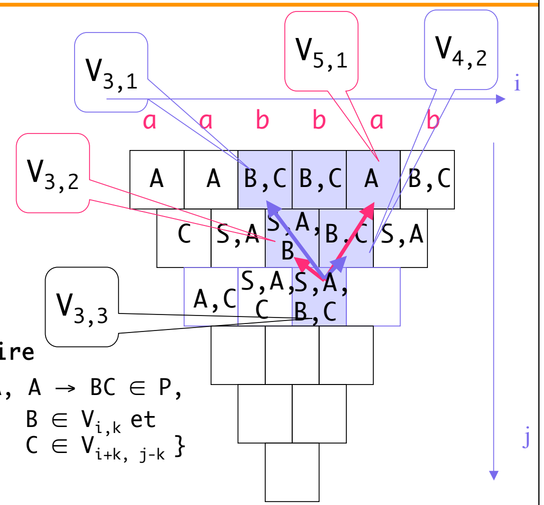
$S \to AB \mid BB$
$A \to CC \mid AB \mid a$
$B \to BB \mid CA \mid b$
$C \to BA \mid AA \mid b$



pour $j = 3$
  pour $i = 2$
    $V_{i,j} \leftarrow \emptyset$
    pour k de 1 à 2 faire
      $V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,$
        $B \in V_{i,k}$ et
        $C \in V_{i+k,\ j-k}\ \}$

Exemple

$S \to AB \mid BB$
$A \to CC \mid AB \mid a$
$B \to BB \mid CA \mid b$
$C \to BA \mid AA \mid b$

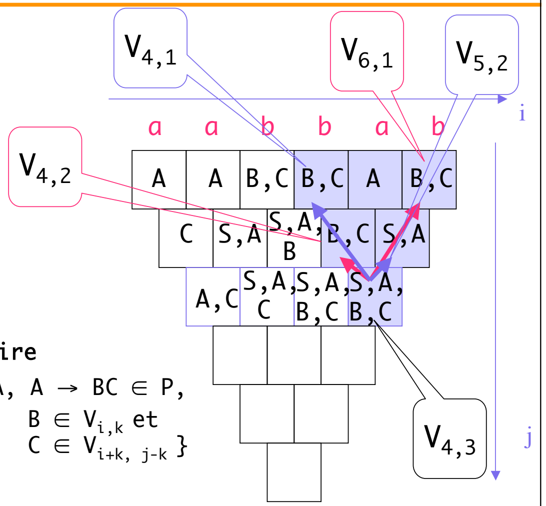


pour $j = 3$
  pour $i = 3$
    $V_{i,j} \leftarrow \emptyset$
    pour k de 1 à 2 faire
      $V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,$
        $B \in V_{i,k}$ et
        $C \in V_{i+k,\ j-k}\ \}$

Exemple

S → AB | BB
A → CC | AB | a
B → BB | CA | b
C → BA | AA | b

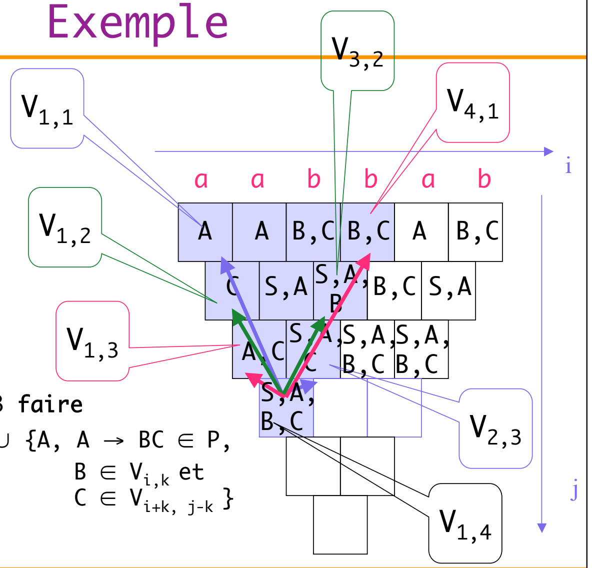
pour j = 3
  pour i = 4
    $V_{i,j} \leftarrow \emptyset$
    pour k de 1 à 2 faire
      $V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,$
        $B \in V_{i,k}$ et
        $C \in V_{i+k,\ j-k}\ \}$



Exemple

S → AB | BB
A → CC | AB | a
B → BB | CA | b
C → BA | AA | b

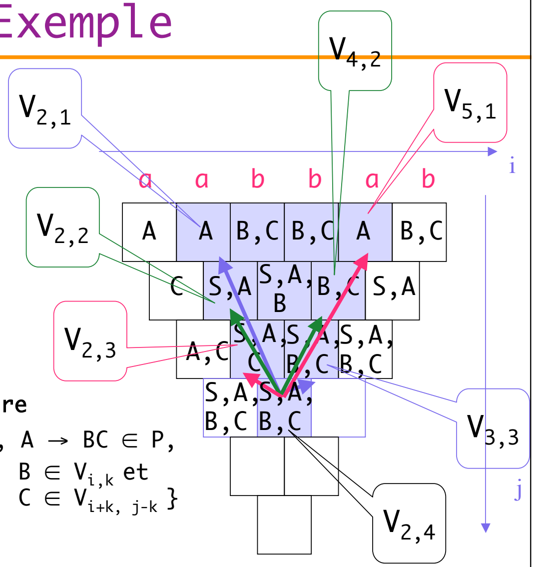
pour j = 4
  pour i = 1
    $V_{i,j} \leftarrow \emptyset$
    pour k de 1 à 3 faire
      $V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,$
        $B \in V_{i,k}$ et
        $C \in V_{i+k,\ j-k}\ \}$



Exemple

S → AB | BB
A → CC | AB | a
B → BB | CA | b
C → BA | AA | b

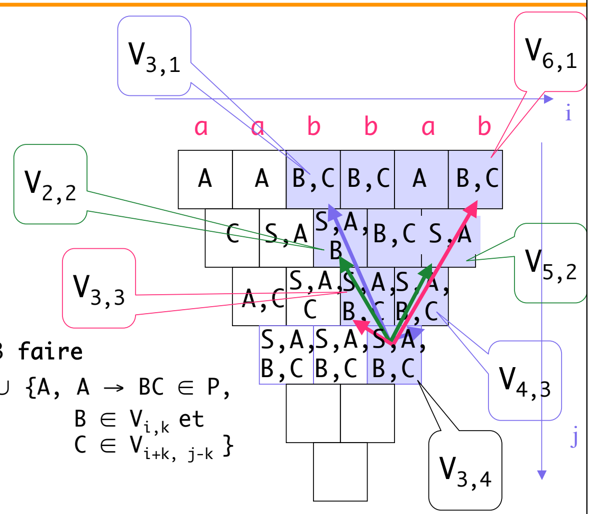
pour j = 4
  pour i = 2
    $V_{i,j} \leftarrow \emptyset$
    pour k de 1 à 3 faire
      $V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,$
        $B \in V_{i,k}$ et
        $C \in V_{i+k,\ j-k}\ \}$



Exemple

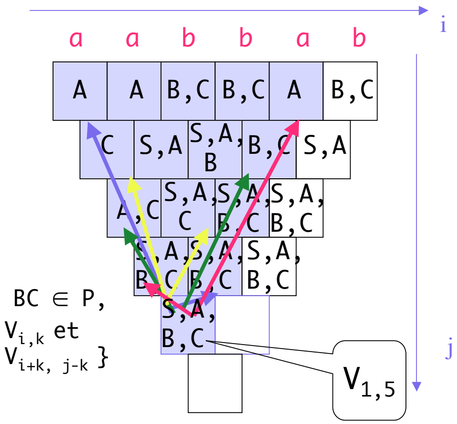
S → AB | BB
A → CC | AB | a
B → BB | CA | b
C → BA | AA | b

pour j = 4
  pour i = 3
    $V_{i,j} \leftarrow \emptyset$
    pour k de 1 à 3 faire
      $V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,$
        $B \in V_{i,k}$ et
        $C \in V_{i+k,\ j-k}\ \}$



Exemple

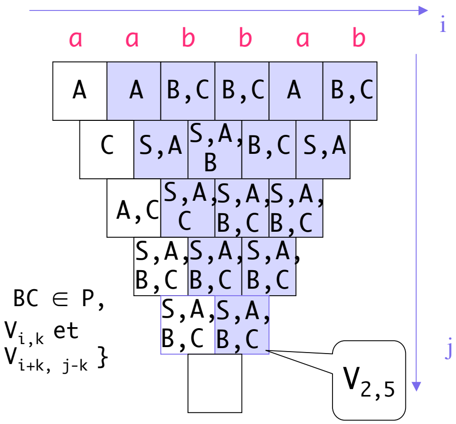
S → AB | BB
A → CC | AB | a
B → BB | CA | b
C → BA | AA | b



pour j = 5
pour i = 1
$V_{i,j} \leftarrow \varnothing$
pour k **de** 1 **à** 4 **faire**
$V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \rightarrow BC \in P,$
$B \in V_{i,k}$ et
$C \in V_{i+k,\ j-k}\ \}$

Exemple

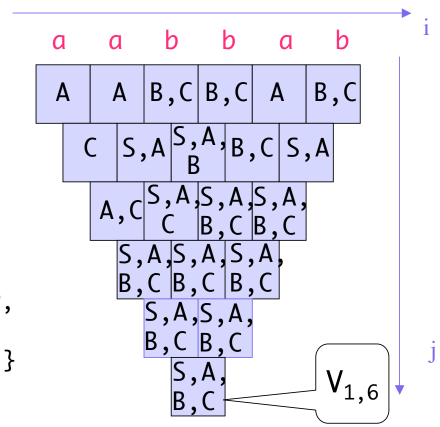
S → AB | BB
A → CC | AB | a
B → BB | CA | b
C → BA | AA | b



pour j = 5
pour i = 1
$V_{i,j} \leftarrow \varnothing$
pour k **de** 1 **à** 4 **faire**
$V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \rightarrow BC \in P,$
$B \in V_{i,k}$ et
$C \in V_{i+k,\ j-k}\ \}$

Exemple

S → AB | BB
A → CC | AB | a
B → BB | CA | b
C → BA | AA | b



pour j = 6
pour i = 1
$V_{i,j} \leftarrow \varnothing$
pour k **de** 1 **à** 5 **faire**
$V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \rightarrow BC \in P,$
$B \in V_{i,k}$ et
$C \in V_{i+k,\ j-k}\ \}$

➥ $S \in V_{1,6}$ donc $\mu \in L(G)$

Récursivité à gauche

- Une grammaire est récursive à gauche dès qu'elle contient une production de la forme :

$B \rightarrow B\,w$
avec $B \in N$ et $w \in (N \cup T)^*$

- Si on simule la dérivation d'un mot à partir de l'axiome, la récursivité à gauche conduit à une boucle infinie ...

Théorème: Pour toute grammaire algébrique récursive à gauche, il existe une grammaire algébrique équivalente exempte de récursivité à gauche.

Suppression de la récursivité à gauche

- On la transforme en *récursivité à droite*, non gênante.
- Prenons un sous-ensemble de productions :

$$B \rightarrow B\,\alpha$$
$$B \rightarrow \beta$$

avec $B \in N$, α, $\beta \in (N \cup T)^*$ et β ne commence pas par B.

- Il engendre le langage :

$$\beta\,\alpha^*$$

- Ce langage est aussi engendré par :

$$B \rightarrow \beta \mid \beta\,Z$$
$$Z \rightarrow \alpha \mid \alpha\,Z$$

avec $Z \notin (N \cup T)^*$

Exemple

- Rappel : G = (N,T,P,E) est ambiguë et récursive à gauche :
  - N = { E }
  - E axiome
  - T = { +, *, i, (,) }
  - P = { E → E + E
    E → E * E
    E → i
    E → (E) }
- En ôtant la récursivité à gauche de G, on obtient G' = (N',T,P',E) :
  - N' = { E, Z, Z' }
  - T = { +, *, (,), i }
  - E axiome
  - P = { E → i | i Z
    E → (E) | (E) Z
    Z → + E | + E Z
    E → i Z'
    E → (E) Z'
    Z' → * E | * E Z' }
- G' n'est plus récursive à gauche ... Est-elle ambiguë ?

Forme Normale de Greibach

Non traité cette année faute de temps !

On peut faire encore mieux :

- on peut faire en sorte que chaque production commence par « produire » un terminal.
- Une grammaire algébrique G = (N,T,P,S) est sous Forme Normale de Greibach (FNG) si toute production est de la forme :

$$A \rightarrow a\ \alpha$$
avec
$$A \in N,\ a \in T \text{ et } \alpha \in V^* = (N \cup T)^*$$

- Toute grammaire algébrique propre et sans production vide est transformable en grammaire sous FNG.